EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Paulo Cupertino de Lima

EDITORA ufmg

Paulo Cupertino de Lima

CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Belo Horizonte
Editora UFMG
2009

Os Cursos de Graduação da UFMG, modalidade a distância, foram concebidos tendo em vista dois princípios fundamentais. O primeiro se refere à democratização do acesso à educação superior; o segundo consiste na formação de profissionais de alto nível, comprometidos com o desenvolvimento do país.

A coletânea da qual este volume faz parte visa dar suporte aos estudantes desses cursos. Cada volume está relacionado a um tema, eleito como estruturante na matriz curricular. Ele apresenta os conhecimentos mínimos que são considerados essenciais no estudo do tema. Isto não significa que o estudante deva se limitar somente ao estudo do volume. Ao contrário, ele é o ponto de partida na busca de um conhecimento mais amplo e aprofundado sobre o assunto. Nessa direção, cada volume apresenta uma bibliografia, com indicação de obras impressas e virtuais que deverão ser consultadas à medida que se fizer necessário.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas, que consistem em unidades de estudo do tema tratado. Os objetivos, apresentados em cada início de aula, indicam as competências e habilidades que o estudante deve adquirir ao término de seu estudo. As aulas podem se constituir em apresentação, reflexões e indagações teóricas, em experimentos ou em orientações para atividades a serem realizadas pelos estudantes.

Para cada aula ou conjunto de aulas, foi elaborada uma autoavaliação com o objetivo de levar o estudante a avaliar o seu progresso e a desenvolver estratégias de metacognição ao se conscientizar dos diversos aspectos envolvidos em seus processos cognitivos. Essa autoavaliação auxiliará o estudante a tornar-se mais autônomo, responsável, crítico, capaz de desenvolver sua independência intelectual. Caso ela mostre que as competências e habilidades indicadas nos objetivos não foram alcançadas, o aluno deverá estudar com mais afinco e atenção o tema proposto, reorientar seus estudos ou buscar ajuda dos tutores, professores especialistas e colegas.

Agradecemos a todas as instituições que colaboraram na produção desta coletânea. Em particular, agradecemos às pessoas (autores, coordenador da produção gráfica, coordenadores de redação, desenhistas, diagramadores, revisores) que dedicaram seu tempo, e esforço na preparação desta obra que, temos certeza, em muito contribuirá para a educação brasileira.

Maria do Carmo Vila
Coordenadora do Centro de Apoio à Educação a Distância
UFMG

Sumário

Apresentação

Este livro foi escrito para ser utilizado nos cursos de Educação a Distância oferecidos pela UFMG para a licenciatura Matemática.

Tendo em vista que ele é destinado a cursos a distância, o texto possui características específicas para assim ser utilizado.

Esta obra trata de funções de várias variáveis, portanto, nele, generalizaremos vários conceitos já estudados para funções de uma variável (tais como limite, continuidade, diferenciabilidade, entre outros), introduzimos os conceitos de curvas de nível, de derivadas parciais, de plano tangente a uma superfície e de derivadas direcionais. Veremos como usar as derivadas parciais nos problemas de máximo e mínimo. Na Aula 1 estudamos retas, planos, cilindros e superfícies quádricas. Na Aula 2 introduzimos o conceito de funções de várias variáveis (domínio, imagem e gráfico), bem como o conceito de curvas de nível para funções de duas variáveis.

Na Aula 3 introduzimos os conceitos de limite e de continuidade para funções várias variáveis e vemos algumas consequências da continuidade de uma função. Na Aula 4 introduzimos o conceito de derivadas parciais e falamos sobre as suas propriedades.

Na Aula 5 abordamos os conceitos de diferenciabilidade e de diferencial de uma função e de plano tangente a uma superfície. Enfatizamos o fato, que o plano tangente nos permite aproximar localmente o valor da função diferenciável por algo que é linear.

Na Aula 6 introduzimos a Regra da Cadeia e o conceito de derivada direcional. Damos o significado geométrico do gradiente de uma função de duas variáveis e vemos a sua relação com as curvas de nível da função.

Na Aula 7 analisamos os conceitos de máximos e mínimos locais e globais de uma função, bem como o conceito de pontos críticos. Usamos as derivadas parciais para encontrar os pontos críticos de uma função diferenciável de duas variáveis, bem como a caracterização dos mesmos, por meio do Teste da Derivada Segunda. Descrevemos o procedimento para encontrarmos os valores máximos e mínimos globais de uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado.

Na Aula 8 apresentamos o Método dos Multiplicadores de Lagrange.

Finalmente, agradeço à minha mestra, colega e amiga, Maria Cristina Costa Ferreira, que fez a revisão final do texto, ainda contribuindo com sugestões e correções.

AULA 1

Retas, planos, cilindros e superfícies quádricas

OBJETIVOS

No final desta aula, o aluno deverá ser capaz de:

1. Compreender os conceitos de retas, planos, cilindros e superfícies quádricas.
2. Ser capaz de encontrar as equações paramétricas de uma reta ou de um segmento de reta.
3. Encontrar a equação de um plano.
4. Identificar e esboçar cilindros e superfícies quádricas.

1.1 EQUAÇÕES DA RETA

Dado um ponto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e um vetor não nulo $\vec{V} = (a, b, c)$, a reta que passa pelo ponto P_o e é paralela a $\vec{V}$ é o conjunto de pontos $P(x, y, z)$, tais que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_o} + t\vec{V}$, onde t é um parâmetro real. Isto nos leva às seguintes **equações paramétricas** da reta:

$$x = x_o + at, \quad y = y_o + bt \quad e \quad z = z_o + ct. \tag{1.1}$$

Se quisermos as equações paramétricas da reta que passa por dois pontos distintos $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$, basta tomarmos

$$\vec{V} = \overrightarrow{P_oP_1} = (x_1 - x_o, y_1 - y_o, z_1 - z_o)$$

na equação (1.1).

Exercício 1.1 Encontre as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $(0, 0, 1)$ e $(1, -1, 2)$.

Exercício 1.2 Dados dois pontos distintos $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$, verifique que as equações

$$x = x_o(1 - t) + x_1 t, \quad y = y_o(1 - t)y + y_1 t \quad e \quad z = z_o(1 - t) + z_1 t, \tag{1.2}$$

onde $0 \leq t \leq 1$, descrevem os pontos do segmento de reta ligando P_o a P_1.

1.2 EQUAÇÕES DO PLANO

A seguir obteremos a equação do plano que passa pelo ponto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e tem $\vec{N} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ como vetor normal.
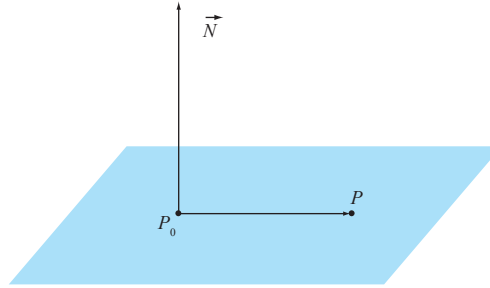
Figura 1.1: O plano que passa por $P_o\,(x_o, y_o, z_o)$ e tem $\overrightarrow{N}$ como vetor normal.

Se $P(x, y, z)$ for um ponto qualquer do plano, então os vetores $\overrightarrow{P_oP}$ e $\vec{N}$ são ortogonais, portanto, o produto escalar deles deve ser zero, ou seja,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_oP} \cdot \vec{N} &= (x - x_o, y - y_o, z - z_o) \cdot (a, b, c) \\ &= ax + by + cz - (ax_o + by_o + cz_o) = 0, \end{aligned}$$

o que nos leva à seguinte equação para o plano

$$ax + by + cz = d, \quad onde \quad d = ax_o + by_o + cz_o. \tag{1.3}$$

Também podemos determinar a equação do plano que passa por três pontos não alinhados $P_o(x_o, y_o, z_o)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Basta observarmos que o vetor

$$\vec{N} \equiv \overrightarrow{P_oP_1} \times \overrightarrow{P_oP_2}$$

é perpendicular ao plano, então, a partir dele e de um dos pontos dados, digamos P_o, usamos (1.3) e obtemos a equação do plano. Ou seja, a equação do plano é dada pelo produto misto

$$\overrightarrow{P_oP} \cdot (\overrightarrow{P_oP_1} \times \overrightarrow{P_oP_2}) = \det \begin{pmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ x_1 - x_o & y_1 - y_o & z_1 - z_o \\ x_2 - x_o & y_2 - y_o & z_2 - z_o \end{pmatrix} = 0.$$

Exercício 1.3 Encontre a equação do plano que passa por $(1, 1, 1)$ e tem como vetor normal o vetor $\vec{N} = (1, 2, 3)$.

Exercício 1.4 Encontre a equação do plano que passa pelos pontos $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

1.3 CILINDROS

Definição 1.1 Um cilindro é uma superfície constituida de todas as retas (chamadas de **geratrizes**) que são paralelas a uma reta dada e que passam por uma curva plana C.

Se uma das variáveis x, y ou z estiver faltando na equação da superfície, ela será um cilindro. Neste caso, as geratrizes serão retas paralelas ao eixo correspondente à variável que está faltando, como veremos no exemplo abaixo.

Exemplo 1.1 Esboce a superfície $z = x^2$.

Solução Note que para um valor de x fixo, para qualquer valor de y, o ponto (x, y, x^2) pertence à superfície. Portanto, ela é um cilindro e as geratrizes são retas paralelas ao eixo dos y. Como a coordenada z dos pontos acima satisfazem $z = x^2$, a curva C é a curva $z = x^2$, no plano xz. Com isso temos o cilindro mostrado na Figura 1.2. Como a curva que dá origem a ele é uma parábola, ele é chamado de **cilindro parabólico**.

□
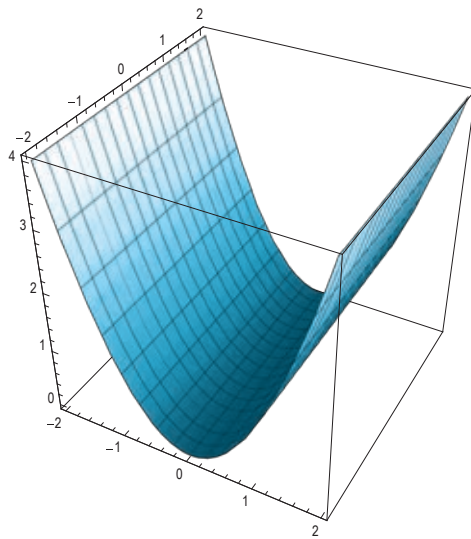
Figura 1.2: O gráfico de $z = x^2$.

1.4 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

A seguir introduziremos as superfícies quádricas, veja também [1], nas Referências.

Definição 1.2 Uma **superfície quádrica** é dada por uma equação de segundo grau nas três variáveis x, y e z. A sua forma mais geral é

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

onde $A, B, \dots, J$ são constantes. Por meio de rotação e translação de eixos, essa equação pode ser colocada nas formas

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad ou \quad Ax^2 + By^2 + Iz = 0.$$

Exemplo 1.2 A seguir falaremos um pouco sobre simetria por reflexão nas superfícies quádricas, para isso consideraremos a superfície esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Note que se um ponto (x_o, y_o, z_o) satisfizer a equação acima, então o ponto $(x_o, y_o, -z_o)$ também a satisfará, pois na equação a variável z aparece ao quadrado e $(-z)^2 = z^2$. Neste caso, dizemos que a equação é invariante a troca de z por $-z$. Por outro lado, os pontos (x_o, y_o, z_o) e $(x_o, y_o, -z_o)$ estão relacionados por reflexão através do plano $z = 0$. Isto significa que, uma vez tendo esboçado a superfície para $z \geq 0$ (hemisfério superior), o esboço correspondente à parte $z \leq 0$ (hemisfério inferior) pode ser obtido refletindo através do plano $z = 0$, a porção da superfície acima do plano $z \geq 0$. No exemplo acima, como as variáveis x e y também aparecem ao quadrado, valem as mesmas observações que foram feitas para a variável z. Isto significa que, uma vez esboçado a superfície para x, y e z não negativos, toda a superfície pode ser obtida por reflexões sucessivas através dos planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente.

Exercício 1.5 Baseado na discussão do exemplo 1.2, discuta as simetrias por reflexão da superfície quádrica $z = x^2 - y^2$.

No esboço de superfícies em geral, é útil considerarmos a interseção das mesmas com os planos paralelos aos planos coordenados. Tais curvas são chamadas de **traços** (ou **secções transversais**) da superfície.

A seguir veremos como usar as secções transversais nos esboços das superfícies quádricas. Sem perda de generalidade, assumiremos valores particulares para os coeficientes que aparecem nas equações das mesmas. Como as secções transversais das superfícies quádricas serão elipses, parábolas ou hiperbóles, a seguir faremos uma rápida revisão destas curvas.

1.4.1 Cônicas

As cônicas são curvas planas obtidas através das interseções de planos com um cone. Elas são dadas por equações da seguinte forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde $A, B, \ldots, F$ são constantes.

Temos as seguintes possibilidades: (i) se $B^2 > AC$ a cônica é uma hipérbole; (ii) se $B^2 < AC$ a cônica é uma elipse; e (iii) se $B^2 = AC$ a cônica é uma parábola.

Por meio de translações e de rotações de eixos, podemos colocar equação da cônica numa das seguinte formas canônicas:

(Parábola)

$$x^2 = 4py \quad ou \quad y^2 = 4px,$$

cujas diretrizes são as retas $y = -p$ e $x = -p$, respectivamente.

(Elipse)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

as constantes a e b são os semieixos da elipse. Se $a = b$, a elipse degenera-se na circunferência $x^2 + y^2 = a^2$.

(Hipérbole)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ou \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

no primeiro caso o eixo de simetria é o eixo dos x e no segundo caso o eixo de simetria é o eixo dos y. As assíntotas das hipérboles são as retas $y = \pm\frac{a}{b}\,x$ e $x = \pm\frac{a}{b}\,y$, respectivamente.

Exercício 1.6 Esboce as curvas cujas equações são dadas abaixo:

a) $y = -4x^2$

b) $x = -y^2$

c) $y = x^2 - 5x + 6$

d) $x = -4y^2 - y$

e) $x^2 + y^2 = 9$

f) $4x^2 + 9y^2 = 36$

g) $4x^2 - 9y^2 = 36$

h) $y^2 - x^2 = 1$.

Exercício 1.7 Dada a superfície $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$, identifique e esboce as curvas correspondentes às secções transversais com os planos $z = 0$, $z = 1/2$, $z = 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 2$.

Exercício 1.8 Dada a superfície $z = 2x^2 + y^2$, identifique e esboce as curvas correspondentes às secções transversais com os planos $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 2$.

Exercício 1.9 Dada a superfície $z = x^2 - y^2$, identifique e esboce as curvas correspondentes às secções transversais com os planos $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$, $z = 2$, $z = -2$, $x = 0$, $x = -1$, $y = 0$ e $y = -2$.

Exercício 1.10 Dada a superfície $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$, identifique e esboce as curvas correspondentes às secções transversais com os planos $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.

Exercício 1.11 Dada a superfície $-x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$, identifique e esboce as curvas correspondentes às secções transversais com os planos $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, $z = -2$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = -1$.

Exercício 1.12 Dada a superfície $x^2 + \frac{y^2}{9} = z^2$, identifique e esboce as curvas correspondentes às secções transversais com os planos $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = -1$.

1.4.2 Exemplos de superfícies quádricas

Exemplo 1.3 (Elipsoide) Esboce a superfície dada pela equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1,$$

a partir das suas secções transversais.

Solução Como na equação acima as variáveis x, y e z aparecem ao quadrado, a equação é invariante às trocas de x por $-x$, y por $-y$ e de z por $-z$. Logo, a superfície é simétrica em relação aos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente.

Se fizermos $z = z_o$, teremos

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - z_o^2.$$

Como o lado esquerdo da equação acima é não negativo, devemos ter $|z_o| \leq 1$. Para $z_o = \pm 1$, a equação acima reduz-se ao ponto $(0,0)$, portanto, as secções correspondentes a $z_o = 1$ e $z_o = -1$ degeneram-se nos pontos $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$, respectivamente. Para $|z_o| < 1$, a secção transversal é a elipse

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{1 - z_o^2})^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{1 - z_o^2})^2} = 1,$$

cujos semieixos são $2\sqrt{1 - z_o^2}$ e $3\sqrt{1 - z_o^2}$, portanto, seus valores máximos são 2 e 3, correspondendo a $z_o = 0$.

De maneira análoga, se fizermos $x = x_o$ e $y = y_o$ deveremos ter $|x_o| \leq 2$ e $|y_o| \leq 3$, respectivamente. Teremos elipses se $|x_o| < 2$ e $|y_o| < 3$. Se $x_o = 2$ ou $x_o = -2$, as secções degeneram-se aos pontos $(2,0,0)$ e $(-2,0,0)$, respectivamente. Se $y_o = 3$ ou $y_o = -3$, as secções degeneram-se nos pontos $(0,3,0)$ e $(0,-3,0)$, respectivamente.

A partir das secções transversais obtidas acima, temos a superfície mostrada na Figura 1.3.

□
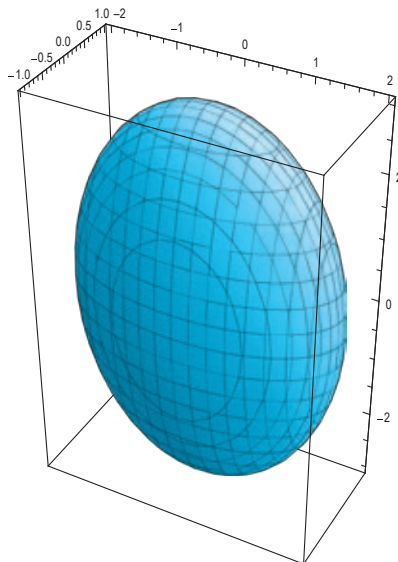
Figura 1.3: A superfície dada por $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$.

A equação mais geral de um elipsoide é dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. As constantes a, b e c são chamadas de semieixos do elipsoide. Se $a = b = c$ o elipsoide degenera-se numa superfície esférica.

Exemplo 1.4 (Paraboloide elíptico) Esboce a superfície dada pela equação

$$z = 2x^2 + y^2,$$

a partir das suas secções transversais.

Solução Note que a equação acima fica invariante ao trocarmos x por $-x$ ou y por $-y$, logo, o seu gráfico será simétrico em relação aos planos $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

A secção transversal da superfície pelo plano $z = z_o$ é

$$2x^2 + y^2 = z_o,$$

como o lado esquerdo da equação acima é não negativo, devemos tomar $z_o \geq 0$. Para $z_o = 0$, a secção se degenera no ponto $(0, 0, 0)$ e para os demais valores de z_o, temos as elipses

$$\frac{x^2}{(\sqrt{z_o/2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{z_o})^2} = 1.$$

Se fizermos $x = x_o$ ou $y = y_o$, as secções transversais serão, respectivamente, as parábolas

$$z = y^2 + 2x_o^2,$$

ou

$$z = 2x^2 + y_o^2.$$

A partir das secções transversais obtidas acima, temos a superfície mostrada na Figura 1.4.

□
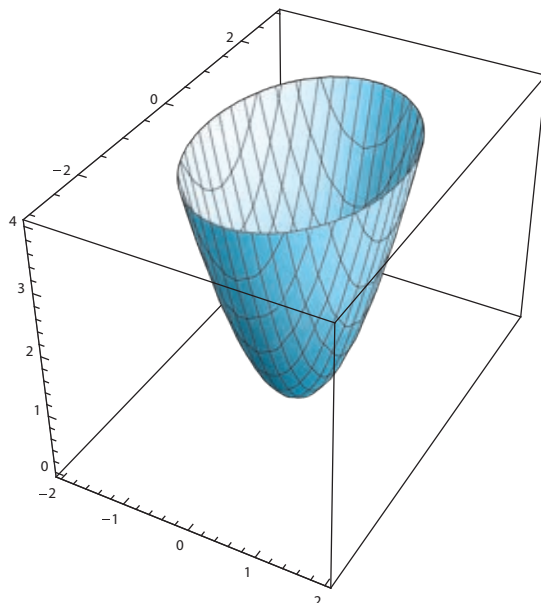
Figura 1.4: A superfície dada por $z = 2x^2 + y^2$.

A equação mais geral de um paraboloide elíptico tendo z como eixo de simetria é dada por $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Nesta expressão podemos trocar o z pelo x ou o z pelo y e teremos paraboloides elípticos também, por exemplo, $x = 2x^2 + 3z^2$ ou $y = x^2 + z^2$.

Exemplo 1.5 (Paraboloide hiperbólico) Esboce a superfície dada pela equação

$$z = x^2 - y^2,$$

a partir das suas secções transversais.

Solução Note que a equação acima fica invariante ao trocarmos x por $-x$ ou y por $-y$, logo, a superfície será simétrica em relação aos planos $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

As secções da superfície pelo plano $z = z_o$ são

$$x^2 - y^2 = z_o.$$

Portanto, se $z_o = 0$, temos as retas $y = x$ e $y = -x$. Para valores de $z_o > 0$, temos as hipérboles

$$\frac{x^2}{(\sqrt{z_o})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{z_o})^2} = 1,$$

e para $z_o < 0$, temos as hipérboles

$$\frac{y^2}{(\sqrt{|z_o|})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{|z_o|})^2} = 1.$$

As assíntotas das hipérboles são as retas $y = x$ e $y = -x$. Os eixos de simetrias das hipérboles serão o eixo dos x, se $z_o > 0$ ou o eixo dos y, se $z_o < 0$. Os vértices das hipérboles se afastam da origem à medida que $|z_o|$ aumenta.

Se fizermos $x = x_o$, temos a parábola

$$z = -y^2 + x_o^2,$$

cujo vértice se encontra sobre o semieixo z positivo e se afasta da origem à medida que $|x_o|$ aumenta.

De maneira análoga, se fizermos $y = y_o$, temos a parábola

$$z = x^2 - y_o^2,$$

cujo vértice se encontra sobre o semieixo z negativo e se afasta da origem à medida que $|y_o|$ aumenta.

A partir das secções transversais obtidas acima, temos a superfície mostrada na Figura 1.5, a qual tem a forma de uma sela.

□

A equação mais geral de um paraboloide hiperbólico como o descrito acima é dada por $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Também podemos trocar z por x ou z por y nesta expressão que ainda teremos um paraboloide hiperbólico. Por exemplo, podemos ter $x = y^2 - z^2$ ou $y = z^2 - x^2$.
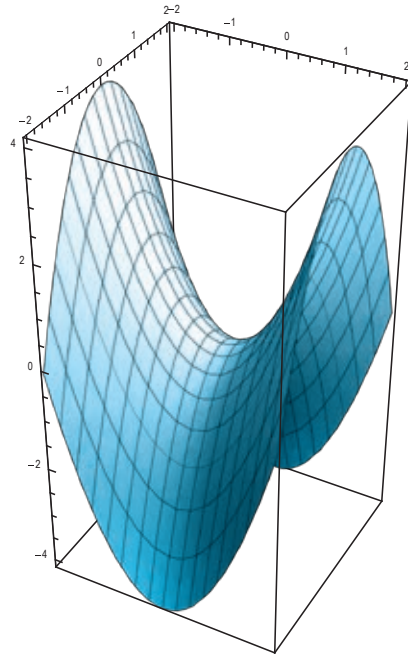
Figura 1.5: A superfície dada pela equação $z = x^2 - y^2$.

Exemplo 1.6 (Hiperboloide de uma folha) Esboce a superfície dada pela equação

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1,$$

a partir das suas secções transversais.

Solução A equação acima fica invariante ao trocarmos x por $-x$, ou y por $-y$ ou z por $-z$, logo, a superfície é simétrica em relação aos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente.

Se fizermos $z = z_o$, teremos as elipses

$$\frac{x^2}{(\sqrt{4 + z_o^2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{4 + z_o^2/2})^2} = 1.$$

Se fizermos $x = x_o$, teremos

$$y^2 - \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{x_o^2}{4}.$$

Portanto, se $x_o = \pm 2$, teremos as retas $z = 2y$ e $z = -2y$. Se $|x_o| < 2$, teremos a hipérbole

$$\frac{y^2}{(\sqrt{4 - x_o^2/2})^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{4 - x_o^2})^2} = 1$$

e se $|x^o| > 2$, teremos a hipérbole

$$\frac{z^2}{(\sqrt{x_o^2 - 4})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{x_o^2 - 4/2})^2} = 1.$$

De maneira análoga, se fizermos $y = y_o$, teremos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1 - y_o^2,$$

portanto, se $|y_o| = 1$, teremos as retas $z = x$ e $z = -x$. Se $|y_o| < 1$, teremos a hipérbole

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{1-y_o^2})^2} - \frac{z^2}{(2\sqrt{1-y_o^2})^2} = 1,$$

e se $|y_o| > 1$, teremos a hipérbole

$$\frac{z^2}{(2\sqrt{y_o^2-1})^2} - \frac{x^2}{(2\sqrt{y_o^2-1})^2} = 1.$$

A partir das secções transversais obtidas acima, temos a superfície mostrada na Figura 1.6.

□
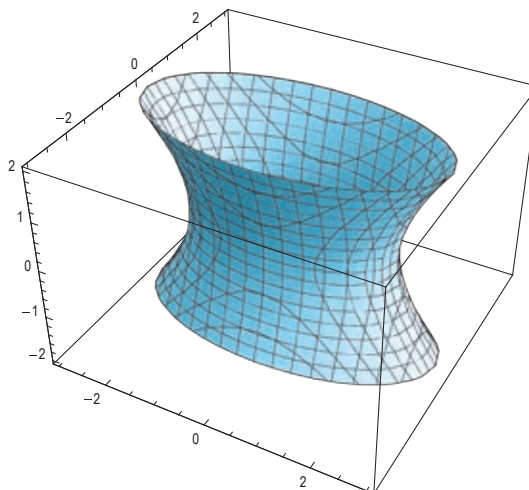
Figura 1.6: A superfície dada pela equação $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$.

A equação mais geral de um hiperboloide de uma folha como o descrito acima é dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Também podemos trocar z por x ou z por y nesta expressão que ainda teremos um hiperboloide de uma folha.

Exemplo 1.7 (Hiperboloide de duas folhas) Esboce a superfície dada pela equação

$$-x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1,$$

a partir das suas secções transversais.

Solução A equação acima fica invariante ao trocarmos x por $-x$, ou y por $-y$ ou z por $-z$, logo, a superfície é simétrica em relação aos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente.

Se fizermos $z = z_o$, teremos

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = z_o^2 - 1.$$

Como o lado esquerdo da equação acima é não negativo, devemos tomar $|z_o| \geq 1$. Se $z_o = 1$ e $z_o = -1$, as secções degeneram-se nos pontos $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$, respectivamente. Para $|z_o| > 1$, teremos as elipses

$$\frac{x^2}{(\sqrt{z_o^2 - 1})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{z_o^2 - 1})^2} = 1.$$

Se fizermos $x = x_o$, teremos as hipérboles

$$\frac{z^2}{(\sqrt{1 + x_o^2})^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{1 + x_o^2})^2} = 1.$$

Se fizermos $y = y_o$, teremos as hipérboles

$$\frac{z^2}{(\sqrt{4 + y_o^2}/2)^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{4 + y_o^2}/2)^2} = 1.$$

A partir das secções transversais obtidas acima, temos a superfície mostrada na Figura 1.7.

□
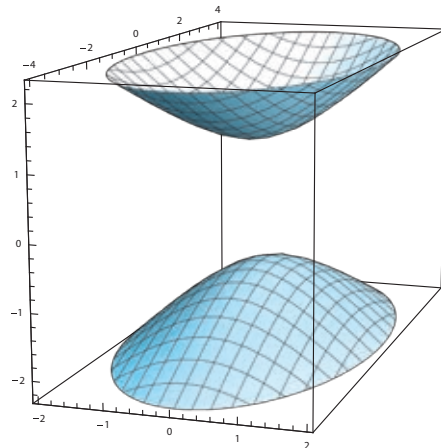
Figura 1.7: A superfície dada pela equação $-x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$.

A equação mais geral de um hiperboloide de duas folhas como o descrito acima é dada por $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Também podemos trocar z por x ou z por y nesta expressão que ainda teremos um hiperboloide de duas folhas, por exemplo, $-z^2 - y^2 + x^2 = 1$ e $-x^2 - z^2 + y^2 = 1$.

Exemplo 1.8 (Cone elíptico) Esboce a superfície dada pela equação

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = z^2,$$

a partir das suas secções transversais.

Solução A equação acima fica invariante ao trocarmos x por $-x$, ou y por $-y$ ou z por $-z$, logo, ela é simétrica em relação aos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente.

Se fizermos $z = z_o$, teremos

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = z_o^2.$$

Portanto, se $z_o = 0$, a secção degenera-se no ponto $(0,0,0)$. Para $z_o \neq 0$, temos as elipses

$$\frac{x^2}{(\sqrt{|z_o|})^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{|z_o|})^2} = 1.$$

Se fizermos $x = x_o$, teremos

$$z^2 - \frac{y^2}{9} = x_o^2.$$

Portanto, se $x_o = 0$, teremos as retas $z = y/3$ e $z = -y/3$. Para $x_o \neq 0$, teremos as hipérboles

$$\frac{z^2}{(\sqrt{|x_o|})^2} - \frac{y^2}{(3\sqrt{|x_o|})^2} = 1.$$

Se fizermos $y = y_o$, teremos

$$z^2 - x^2 = \frac{y_o^2}{9}.$$

Portanto, se $y_o = 0$, teremos as retas $z = x$ e $z = -x$. Para $y_o \neq 0$, teremos as hipérboles

$$\frac{z^2}{(|y_o|/3)^2} - \frac{x^2}{(|y_o|/3)^2} = 1.$$

A partir das secções transversais obtidas acima, temos a superfície mostrada na Figura 1.8. □
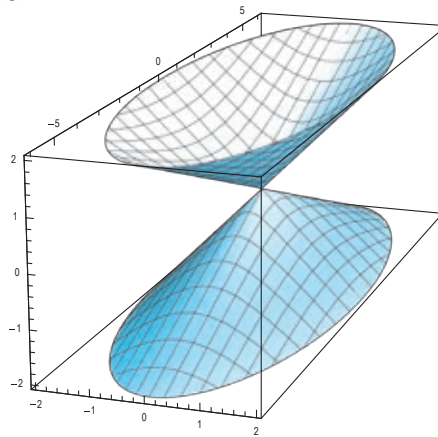
Figura 1.8: A superfície dada pela equação $x^2 + \frac{y^2}{9} = z^2$.

A equação mais geral de um cone com duas folhas como o descrito acima é dada por $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Também podemos trocar z por x ou z por y nesta expressão que ainda teremos um cone com duas duas folhas.

Exemplo 1.9 Dada a curva $y = f(x)$ no plano $z = 0$, onde a inversa $x = f^{-1}(y)$ existe, determine uma equação para a superfície gerada, pela rotação desta curva em torno do eixo y.

Solução Como a superfície solicitada é uma superfície de revolução obtida ao girarmos $y = f(x)$ em torno do eixo y, as suas secções transversais com os planos $y = y_o$ são as circunferências

$$x^2 + z^2 = r^2,$$ □

onde $r = r(y_o)$. Para calcularmos $r(y_o)$, podemos tomar o ponto desta circunferência que está no plano $z = 0$ e sobre a curva $y = f(x)$. Logo, $x = f^{-1}(y_o)$ e $r = |x|$, donde concluimos que $r = |f^{-1}(y_o)|$. Logo, a secção transversal da superfície pelo plano $y = y_o$ é

$$x^2 + z^2 = \left(f^{-1}(y_o)\right)^2.$$

Por outro lado, dada a equação de uma superfície, a sua secção transversal com $y = y_o$ é obtida fazendo-se $y = y_o$ na equação da mesma. Portanto, uma equação da superfície é

$$x^2 + z^2 = \left(f^{-1}(y)\right)^2.$$

□

Exemplo 1.10 Encontre a equação da superfície que descreve o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) que são equidistantes de $P_o(-1, 0, 0)$ e do plano $x = 1$.

Solução Se um ponto $P(x, y, z)$ está na superfície, então a distância de P a P_o deve ser igual a distância de P ao plano $x = 1$. Por outro lado,

$$dist(P, P_o) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$$

e a distância de P ao plano $x = 1$ é a distância de $P(x, y, z)$ ao ponto do plano $x = 1$ mais próximo de P, o qual é $Q(1, y, z)$. Portanto,

$$dist(P, Q) = \sqrt{(x-1)^2}.$$

Portanto, devemos ter

$$dist(P, P_o) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2} = dist(P, Q).$$

Tomando o quadrado desta equação, temos

$$(x+1)^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2.$$

Após simplificação, encontramos

$$x = -\frac{y^2 + z^2}{4},$$

que é o paraboloide de revolução, obtido girando-se a curva $x = -y^2/4$, $z = 0$, em torno do eixo x. Sugerimos que o aluno esboce esta superfície.

□

Exercício 1.13 Esboce o gráfico das superfícies dadas pelas equações abaixo:

a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

c) $y^2 + 9z^2 = 9$

d) $z = 1 - x^2$

e) $x - y^2 = 1$

f) $yz = 1$

g) $z = \cos y$.

Exercício 1.14 Para cada uma das equações abaixo, identifique e esboce a superfície associada.

a) $z^2 = 2x^2 + 4y^2 + 36$
b) $x^2 = y^2 + 4z^2$
c) $4x - 2y^2 + 4z^2 = 0$
d) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$
e) $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$
f) $z^2 = 4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4z$.

Exercício 1.15 Esboce a região delimitada pelas superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$.

Exercício 1.16 Dados uma curva e um eixo, determine a equação de superfície obtida girando a curva dada em torno do eixo dado.
a) $y = 4x^2$, $(z = 0)$, em torno do eixo y
b) $y = 2x$, $(z = 0)$, em torno do eixo y.

Exercício 1.17 Determine a equação da superfície consistindo de todos os pontos (x, y, z) que são equidistantes do ponto $(0, 0, 1)$ e do plano $z = -2$. Identifique a superfície.

AULA 2

Funções de várias variáveis

OBJETIVOS
No final desta aula, o aluno deverá ser capaz de:
1. Determinar o domínio de uma função de várias variáveis.
2. Descrever e esboçar as curvas de nível de uma função de duas variáves.
3. Fazer o esboço de uma superfície a partir das suas curvas de nível.

2.1 DOMÍNIO, IMAGEM E GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

No curso de Cálculo I, foram introduzidos os conceitos de domínio, imagem e gráfico de uma função de uma variável. Nesta seção estenderemos tais conceitos para funções de várias variáveis.

No caso de uma função de uma variável, o seu gráfico é uma curva no plano, já os gráficos de funções de duas variáveis serão superfícies no espaço.

Definição 2.1 Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um subconjunto D do $\mathbb{R}^2$, um único número real denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio de** f e a sua **imagem** é o conjunto dos valores possíveis de $f(x, y)$, ou seja, $\{f(x, y) : (x, y) \in D\}$. O **gráfico de** f é o conjunto de pontos do $\mathbb{R}^3$ dado por $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$ e ele representa uma superfície no espaço. Se f for dada por uma fórmula e seu domínio não for especificado, estará implicito que ele é o conjunto de todos os (x, y) para os quais a regra está bem definida, no sentido que ela nos dê um número real.

As definições acima se estendem de maneira natural para uma função de mais de duas variáveis.

Exemplo 2.1 Encontre o domínio da função $f(x,y) = \sqrt{x+y}$.

Solução Como a função raiz quadrada só está definida para números reais não negativos devemos ter $x + y \geq 0$, o que geometricamente é a região do plano xy que está acima da reta $y = -x$, incluindo a própria reta.

□

Exemplo 2.2 Encontre o domínio da função $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$.

Solução Como a função logaritmo só está definida para números reais positivos, devemos ter $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, o que geometricamente representa a região do plano xy interior à elipse $\frac{x^2}{3^2} + y^2 = 1$.

□

Exemplo 2.3 Encontre o domínio da função

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2).$$

Solução Como a função f é a soma das funções

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \quad e \quad \ln(4 - x^2 - y^2),$$

o seu domínio será a interseção dos domínios das mesmas, ou seja, temos que tomar (x,y) de modo que eles satisfaçam simultaneamente as seguintes desigualdades:

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \quad e \quad 4 - x^2 - y^2 > 0,$$

ou seja, $1 \leq x^2 + y^2 < 2^2$, o que geometricamente é a região do plano xy entre os circulos centrados na origem e de raios 1 e 2, incluindo os pontos do círculo de raio 1 e excluindo-se os pontos do círculo de raio 2.

□

Exemplo 2.4 Encontre o domínio da função $f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{\ln(x^2+y^2-4)}$.

Solução Como f é o quociente das funções $\sqrt{y - x^2}$ e $\ln(x^2 + y^2 - 4)$, devemos tomar a interseção dos domínios destas e excluir os pontos onde o denominador se anula. Ou seja, queremos que

$$y - x^2 \geq 0, \;\; x^2 + y^2 - 4 > 0 \; e \; x^2 + y^2 - 4 \neq 1,$$

ou seja,

$$y \geq x^2, \;\; x^2 + y^2 > 4 \; e \; x^2 + y^2 \neq 5,$$

o que geometricamente é a região do plano que está acima da parábola $y = x^2$ e exterior ao círculo $x^2 + y^2 = 4$, da qual tiramos os pontos que estão no círculo $x^2 + y^2 = 5$.

□

Exercício 2.1 Determine e esboce os domínios das funções dadas.

a) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

d) $f(x,y) = \frac{1}{e^x+e^y}$ e) $f(x,y) = \sqrt{y-x}\,\ln(x+y)$ f) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

g) $f(x,y) = \sqrt{1-x} - e^{x/y}$ h) $f(x,y) = \ln(xy)$ i) $f(x,y) = \frac{1}{x-y^2}$.

2.2 CURVAS DE NÍVEL

Gráficos nos fornecem uma maneira de visualizarmos funções de duas variáveis. Uma outra maneira de visualizarmos tais funções é desenhar as suas curvas de nível, as quais serão definidas abaixo.

Definição 2.2 Seja $f(x,y)$ uma função de duas variáveis e k um número real. O conjunto dos pontos (x,y) no domínio de f para os quais $f(x,y) = k$ é chamado de uma **curva de nível** de f. Ela contém os pontos do domínio de f para os quais o gráfico de f tem altura k. Ao esboçarmos a curva de nível no plano xy, devemos associar a ela o seu correspondente valor de k.

Exemplo 2.5 As curvas de nível da função $f(x,y) = x^2 + y^2$, são as curvas $x^2 + y^2 = k$, onde $k \geq 0$. Devemos ter $k \geq 0$, pois $x^2 + y^2 \geq 0$. As curvas de níveis são circunferências concêntricas na origem de raios $\sqrt{k}$. Quando $k = 0$, a curva de nível degenera-se no ponto $(0,0)$. Sugerimos que o aluno leitor esboce as curvas de níveis para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$.

Ao tomarmos as secções do gráfico de $f(x,y)$ pelo plano $z = k$, fatiamos o gráfico de $f(x,y)$ em curvas, cujas projeções no plano xy nos dão as curvas de nível de f. A partir destas podemos fazer o processo inverso, ou seja, podemos esboçar o gráfico de f. Isto é feito da seguinte maneira: para cada k elevamos a curva de nível $f(x,y) = k$ até o plano $z = k$, obtendo assim o que denominamos traço horizontal do gráfico de f no plano $z = k$. O gráfico de $f(x,y)$ é a união de todos os traços assim obtidos. Também a partir das curvas de níveis de uma função, podemos estimar os seus valores.

Exercício 2.2 A partir das curvas de nível obtidas no Exemplo 2.5, esboce o gráfico da superfície $z = x^2 + y^2$.

Em cartografia, uma curva de nível, normalmente chamada de **contorno**, une pontos de mesma elevação (altura), relativamente ao nível do mar. Se a função $f(x,y)$ for a temperatura, então as curvas de nível ligarão pontos que têm a mesma temperatura e elas são chamadas de **isotérmicas**.

Exemplo 2.6 Seja $f(x,y) = 2x + 3y + 3$, então as suas curvas de nível são as retas

$$2x + 3y + 3 = k,$$

as quais têm coeficientes angulares iguais a $-2/3$. Nas Figuras 2.1 e 2.2 mostramos as curvas de nível de $f(x,y)$ e o esboço do seu gráfico a partir das mesmas.
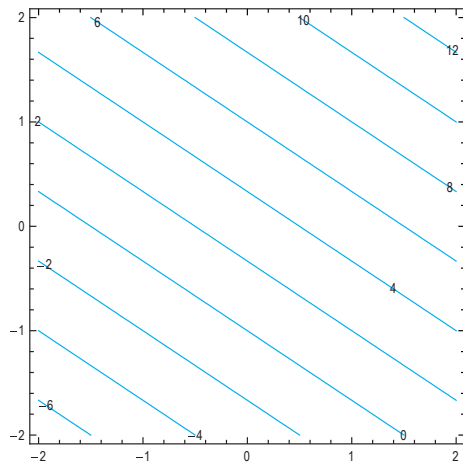
Figura 2.1: As curvas de nível de $f(x,y) = 2x + 3y + 3$.
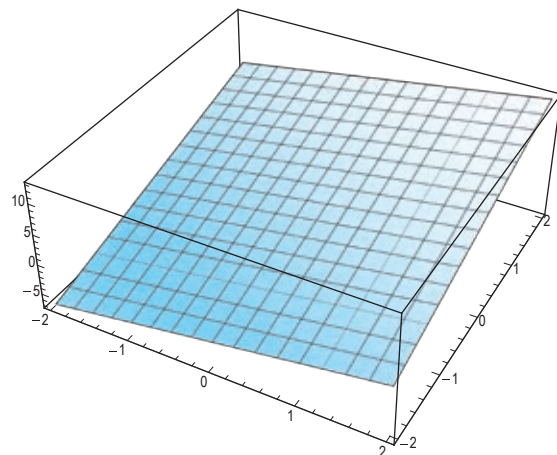
Figura 2.2: O gráfico de $f(x,y) = 2x + 3y + 3$.

Exemplo 2.7 Seja $f(x,y) = 2x^2 + y^2$, então as curvas de nível de $f(x,y)$ são dadas por

$$2x^2 + y^2 = k,$$

onde $k \geq 0$. Para $k = 0$, a curva de nível degenera ao ponto $(0,0)$, enquanto que para valores positivos de k temos as elipses

$$\frac{x^2}{(\sqrt{k/2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{k})^2} = 1.$$

Na Figura 2.3 mostramos as curvas de nível de $2x^2 + y^2$ e na Figura 2.4 mostramos o esboço do seu gráfico a partir das mesmas.
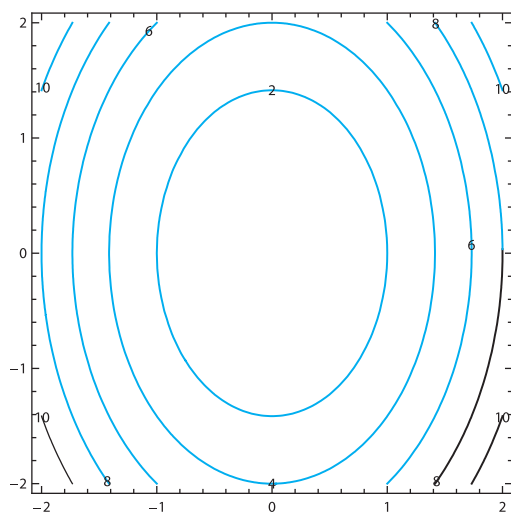
Figura 2.3: As curvas de nível de $f(x,y) = 2x^2 + y^2$.
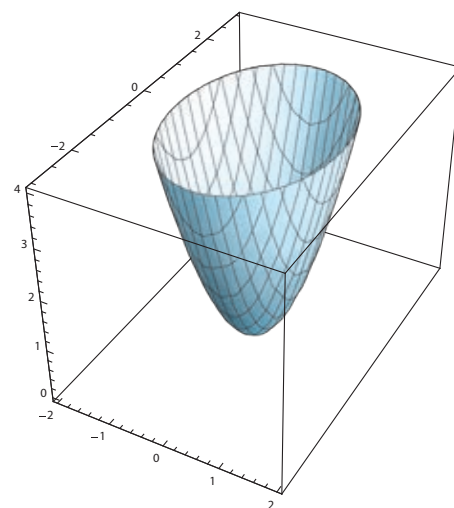
Figura 2.4: O gráfico de $f(x,y) = 2x^2 + y^2$.

Exemplo 2.8 Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$. As suas curvas de nível são as curvas

$$x^2 - y^2 = k,$$

onde k é real. Note que para $k = 0$, temos as retas $y = x$ e $y = -x$.

Para valores de $k \neq 0$, temos as hipérboles $x^2 - y^2 = k$, cujas assíntotas são as retas $y = \pm x$. Os eixos de simetria das hipérboles serão o eixo dos x, se $k > 0$ e o eixo dos y, se $k < 0$. Os vértices das hipérboles se afastam da origem à medida que $|k|$ aumenta (veja a Figura 2.5). A superfície correspondente ao gráfico de f é o paraboloide hiperbólico, esboçado a partir das curvas de nível de $f(x, y) = x^2 - y^2$ (veja a Figura 2.6).
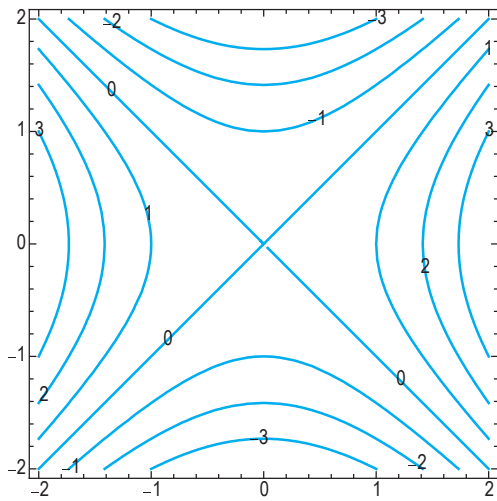
Figura 2.5: As curvas de nível de $f(x,y) = x^2 - y^2$.
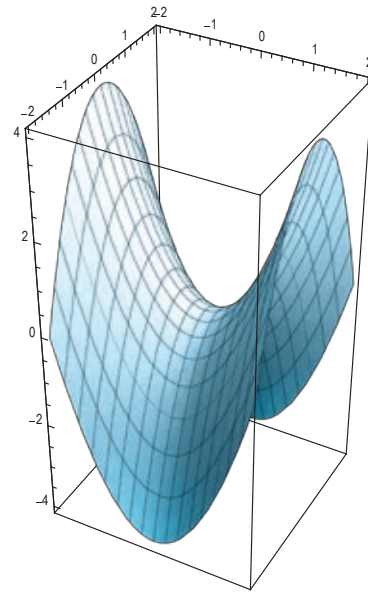
Figura 2.6: O gráfico de $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Exemplo 2.9 Esboce a superfície

$$z = x^2 - y$$

a partir das suas curvas de nível.

Solução As curvas de nível de $z = x^2 - y$ são as parábolas

$$y = x^2 - k,$$

onde k é real. O traço horizontal do gráfico de f no plano $z = k$ é a parábola

$$y = x^2 - k, \quad z = k, \tag{2.1}$$

e o seu vértice é o ponto $(0, -k, k)$. Por outro lado, o conjunto de pontos da forma $(0, -k, k)$, com k real, representa uma parametrização da reta $x = 0$, $z = -y$. Portanto, para esboçarmos a superfície, basta desenharmos esta reta e para cada ponto dela desenhamos a parábola com vértice no mesmo, a qual é descrita pela equação (2.1). A superfície assemelha-se a uma telha colonial (veja a Figura 2.7).

□
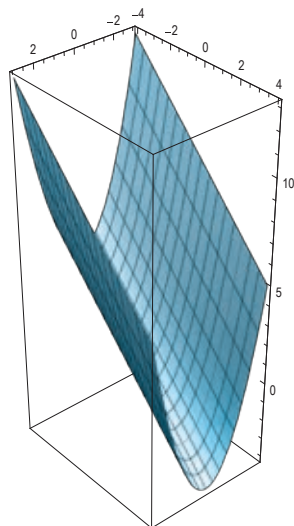
Figura 2.7: A superfície dada pela equação $f(x,y) = x^2 - y$.

Exercício 2.3 Seja $f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2+1}$. Mostre que uma das suas curvas de nível é uma reta e as demais são círculos (veja a Figura 2.8).

Alguns softwares, como o Maple e o Mathematica, nos permitem encontrar as curvas de nível de uma função. Veja o exemplo seguinte.
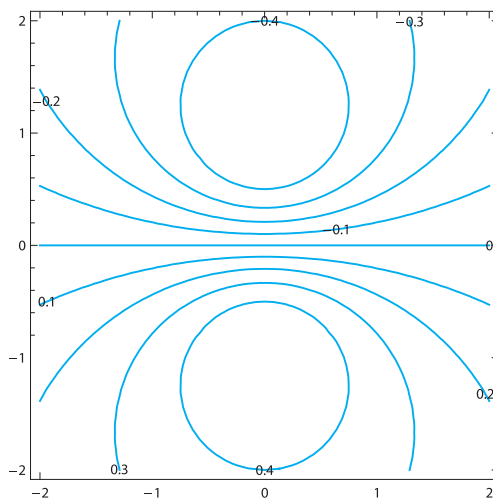
Figura 2.8: As curvas de nível de $f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2+1}$.

Exercício 2.4 Encontre algumas curvas de nível das funções abaixo e tente visualizar as superfícies correspondentes, a partir das mesmas.

a) $f(x,y) = \frac{y}{x}$

b) $f(x,y) = x + y$

c) $f(x,y) = x - y^2$

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

e) $f(x,y) = y^2 - x^2$

f) $f(x,y) = x^2 + y^2$

g) $f(x,y) = xy$

h) $f(x,y) = \text{sen } (x + y)$

i) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$.

j) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
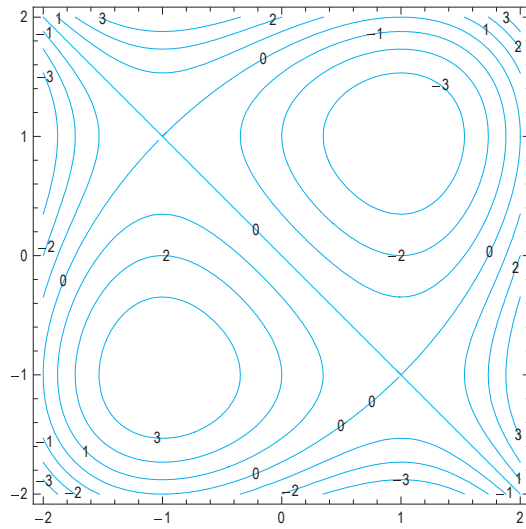
Figura 2.9: Curvas de nível da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ foram obtidas com auxílio do programa Mathematica.

Exercício 2.5 Com auxílio de um computador, obtenha as curvas de nível das funções abaixo.

a) $f(x,y) = xy^2 - x^3$

b) $f(x,y) = xy^3 - yx^3$

c) $f(x,y) = x^3 + y^3$

d) $f(x,y) = \text{sen}(ye^{-x})$.

AULA 3

Limite e continuidade

OBJETIVOS
No final desta aula, o aluno deverá ser capaz de:
1. Compreender as definições de limite e de continuidade.
2. Calcular limites de funções de duas variáveis, caso ele exista e, se ele não existir, saber provar a não existência do mesmo.
3. Saber quais são as consequências da continuidade de uma função.

3.1 ALGUMAS DEFINIÇÕES

Seja $B(x_o, y_o; r)$ o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, para os quais

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < r^2.$$

Que conjunto de pontos é esse?

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que $(x_o, y_o) \in D$ é um **ponto interior** de D, se existir $r > 0$, tal que $B(x_o, y_o; r)$ esteja contido em D.

Dizemos que um ponto (x_o, y_o) em $\mathbb{R}^2$ está na **fronteira** do conjunto D, se para todo $r > 0$, o conjunto $B(x_o, y_o, r)$ contiver pontos que pertecem a D e pontos que não pertecem a D.

Exercício 3.1 Encontre os pontos da fronteira dos seguintes conjuntos:

a) $x^2 + y^2 < 1$

b) $x^2 + y^2 \leq 1$

c) $1 < x^2 + y^2 \leq 3$

d) $\{(x, y) \,:\, x, y > 0\}$.

Dizemos que D é **aberto**, se todos os seus pontos forem interiores. Note que a bola $B(x_o, y_o; r)$ é um conjunto aberto, por isso a denotaremos de **bola aberta**.

Dizemos que D é **fechado**, se o seu complementar em relação a $\mathbb{R}^2$, ou seja, $\mathbb{R}^2 - D$, for aberto.

Exercício 3.2 Em cada um dos conjuntos abaixo, diga se ele é aberto, fechado, nem aberto nem fechado e os esboce.

a) $\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$

b) $\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 > 1\}$

c) $\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

d) $\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$

e) $\{(x, y) \ : \ -1 < x \leq 3, \ -2 \leq y < 1\}$.

Dizemos que D é **limitado**, se existir r finito, tal que $D \subset B(0, 0; r)$.

Dizemos que um subconjunto $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^2$ é uma **vizinhança** de (x_o, y_o), se este ponto for um ponto interior de $\mathcal{N}$. Toda bola aberta centrada em (x_o, y_o) é uma vizinhança deste ponto e qualquer vizinhança de (x_o, y_o) contém uma bola aberta centrada em (x_o, y_o).

Uma **vizinhança deletada** de um ponto (x_o, y_o) é uma vizinhança deste ponto, da qual tiramos o próprio ponto (x_o, y_o). Por exemplo, a bola $B(x_o, y_o; r)$ menos o ponto (x_o, y_o) é uma vizinhança deletada de (x_o, y_o), a qual é dada por

$$0 < \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} < r.$$

As definições acima generalizam-se imediatamente para $\mathbb{R}^n$; por exemplo, em $\mathbb{R}^3$, temos a bola aberta $B(x_o, y_o, z_o; r)$, a qual é o conjunto de pontos (x, y, z), tais que

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 < r^2,$$

que formado pelos pontos interiores à esfera de centro (x_o, y_o, z_o) e raio r.

3.2 LIMITE

O conceito de limite foi visto para funções de uma variável. A seguir o generalizaremos para funções de duas variáveis. A generalização deste conceito para funções de mais de duas para várias variáveis é imediata.

Seja $f(x, y)$ uma função definida em todos os pontos numa vizinhança de um ponto (x_o, y_o), exceto possivelmente, no próprio (x_o, y_o). Muitas vezes queremos saber o que acontece com f à medida que tomamos pontos (x, y) do domínio de f, cada vez mais próximos de (x_o, y_o), ou seja, queremos saber se o valor de $f(x, y)$ se aproxima de algum valor L, à medida que (x, y) se aproxima de (x_o, y_o).

Para medir a proximidade de $f(x, y)$ de L usaremos a letra ϵ, e para medirmos a proximidade de (x, y) de (x_o, y_o), usaremos a letra δ.

Definição 3.1 Consideremos uma função $f : D \to \mathbb{R}$, onde D é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ contendo uma vizinhança deletada do ponto (x_o, y_o). Dizemos que $f(x, y)$ tende a um número real L quando $(x, y) \in D$ tende a (x_o, y_o) e escrevemos

$$\lim_{(x,y) \to (x_o, y_o)} f(x, y) = L,$$

se, e somente se, para todo número $\epsilon > 0$ for possível encontrar um número $\delta > 0$, tal que $|f(x, y) - L| < \epsilon$, sempre que $(x, y) \in D$ e

$$0 < \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} < \delta$$

(veja a Figura 3.1).
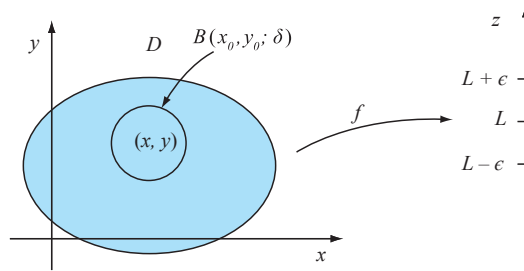
Figura 3.1: Os pontos de D que estão na bola $B(x_0, y_0; \delta)$ são levados no intervalo aberto $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Exemplo 3.1 A partir da definição de limite, calcule

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y),$$

onde $f(x,y)$ é dada abaixo:

a) $f(x,y) = c$, onde c é uma constante,

b) $f(x,y) = x$,

c) $f(x,y) = y$.

Solução

a) Seja $f(x,y) = c$, para todo (x,y). Mostraremos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = c. \tag{3.1}$$

Seja (x_o, y_o) fixado. Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta > 0$ qualquer, então se

$$0 < \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2} < \delta,$$

temos

$$|f(x,y) - c| = 0 < \epsilon,$$

o que mostra (3.1).

b) Seja $f(x,y) = x$, para todo (x,y). Mostraremos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = x_o. \tag{3.2}$$

Seja (x_o, y_o) fixado. Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon$, então se

$$0 < \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2} < \delta,$$

temos

$$|f(x,y) - x_o| = |x - x_o| = \sqrt{(x-x_o)^2} < \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2} < \delta = \epsilon,$$

o que mostra (3.2).

c) Seja $f(x,y) = y$, para todo (x,y). De maneira análoga ao que foi feito no item (b), mostra-se que

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = y_o.$$

□

Teorema 3.1 (**Propriedades do limite**) Sejam f e g definidas numa vizinhança deletada do ponto (x_o, y_o) e α uma constante. Se

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = L \ \ e \ \ \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y) = M,$$

então,

1. $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)}(\alpha f(x,y)) = \alpha L$,
2. $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)}(f(x,y) + g(x,y)) = L + M$,
3. $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)g(x,y) = LM$,
4. $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = L/M$, se $M \neq 0$.
5. Se $h(z)$ for uma função de uma variável que é contínua no ponto $z = L$, então,
$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} h(f(x,y)) = h(L).$$

A demonstração deste teorema é similar à que foi dada para funções de uma variável, por isso a omitiremos.

Sugerimos que o aluno faça uma revisão de continuidade de funções de uma variável, mais precisamente, saber para que valores de x as funções de uma variável mais comuns são contínuas. Por exemplo, polinômios, e^x, as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são contínuas em toda a reta. A função $\ln x$ é contínua em $(0, \infty)$, a função $\sqrt{x}$ é contínua em $[0, \infty)$, desde que em $x = 0$ esteja subentendido continuidade à direita.

Dos itens 1 e 2 do Teorema 3.1, segue-se por indução que se $c_1, \ldots, c_n$ forem constantes e $f_1(x,y), \ldots, f_n(x,y)$ forem funções tais que o limite $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f_i(x,y)$ existam, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \ f_i(x,y) \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \ \left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f_i(x,y) \right). \tag{3.3}$$

Além disso, do item 3 do Teorema 3.1, segue-se por indução que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} (f_1(x,y) \ \ldots f_n(x,y)) \quad &= \quad \left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f_1(x,y) \right) \\ &\ldots \ \left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f_n(x,y) \right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Do Exemplo 3.1 itens (b) e (c) e de (3.4), temos

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} x^n = \left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} x \right) \ldots \left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} x \right) = x_o^n, \tag{3.5}$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} y^n = \left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} y \right) \ldots \left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} y \right) = y_o^n. \tag{3.6}$$

Note que do item 3 do Teorema 3.1, de (3.5) e de (3.6), concluimos que se m, n forem inteiros não negativos, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} x^n y^m = x_o^n \, y_o^m. \tag{3.7}$$

De 3.7 e de (3.3), concluimos que se $f(x,y)$ for um polinônio, então,

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = f(x_o,y_o). \tag{3.8}$$

Além disso, se $g(x,y)$ também for um polinônio e $g(x_o,y_o) \neq 0$, então, segue do item 4, do Teorema 3.1, que

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{f(x_o,y_o)}{g(x_o,y_o)}. \tag{3.9}$$

Exemplo 3.2 Seja $f(x,y) = x^2 - xy + y^3$, calcule $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$.

Solução Como $f(x,y)$ é um polinônio, segue-se de (3.8) que

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2) = 1^2 - (1)(2) + 2^3 = 7.$$

□

Exemplo 3.3 Calcule $\lim_{(x,y)\to(1,2)} h(x,y)$, onde $h(x,y) = \frac{x^2-xy+y^3}{x^2-y^2}$.

Solução Como $h(x,y)$ é a razão de dois polinômios, onde o denominador $x^2 - y^2$ não se anula no ponto $(1,2)$, de (3.9), temos

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} h(x,y) = h(1,2) = \frac{1^2 - (1)(2) + 2^3}{1^2 - 2^2} = -\frac{7}{3}.$$

□

Exemplo 3.4 Calcule $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{\frac{2x^2-xy+y^3}{x^2-y^2}}$.

Solução Note que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2x^2 - xy + y^3}{x^2 - y^2} = \frac{2(1)^2 - (1)(0) + (0)^3}{(1)^2 - (0)^2} = 2.$$

Por outro lado, a função $\sqrt{z}$ é contínua em $z = 2$, do item 5 do Teorema 3.1, temos

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{\frac{2x^2 - xy + y^3}{x^2 - y^2}} = \sqrt{\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2x^2 - xy + y^3}{x^2 - y^2}} = \sqrt{2}.$$

□

Exemplo 3.5 Seja $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x-y}$, para todo $(x,y) \neq (0,0)$, então calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Solução Note que o numerador e o denominador de $f(x,y)$ tendem a zero quando (x,y) tende a $(0,0)$. Por outro lado, para $(x,y) \neq (0,0)$, temos

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)} = x + y.$$

Então, de (3.8), concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x + y) = 0 + 0 = 0.$$

□

Exercício 3.3 *Seja $f(x,y)$ definida numa vizinhança deletada do ponto (x_o, y_o). Mostre que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = 0,$$

se e somente se,

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} |f(x,y)| = 0.$$

Teorema 3.2 (Teorema do Sanduiche) Sejam f, g e h funções definidas numa vizinhança deletada do ponto (x_o, y_o), na qual temos

$$g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y).$$

Se

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} h(x,y),$$

então,

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = L.$$

Prova Tome $\epsilon > 0$. Como

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} h(x,y),$$

então existe $\delta > 0$, tal que se (x,y) estiver na bola $B(x_o, y_o; \delta)$, devemos ter $g(x,y)$ e $h(x,y)$ no intervalo $(L-\epsilon, L+\epsilon)$. Como

$$g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y),$$

teremos

$$L - \epsilon < g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y) < L + \epsilon.$$

Disso, concluimos que para todo $(x,y) \in B(x_o, y_o; \delta)$, temos

$$|f(x,y) - L| < \epsilon,$$

o que prova o teorema.

□

Definição 3.2 Dizemos que uma função f é **limitada** num dado conjunto D, se existir uma constante positiva M, tal que $|g(x,y)| \leq M$, para todo (x,y) em D.

Exemplo 3.6 Suponha que $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sejam definidas numa vizinhança deletada de (x_o, y_o), na qual $g(x,y)$ seja limitada e que

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = 0.$$

Mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)g(x,y) = 0. \tag{3.10}$$

Solução Como $g(x,y)$ é limitada numa vizinhança deletada de (x_o, y_o), existe uma constante positiva, M tal que $|g(x,y)| \leq M$, para todo (x,y) em tal vizinhança, portanto, na mesma vizinhança temos

$$0 \leq |f(x,y)g(x,y)| = |f(x,y)|\,|g(x,y)| \leq M|f(x,y)|,$$

ou seja,

$$0 \leq |f(x,y)g(x,y)| \leq M|f(x,y)|. \tag{3.11}$$

Como $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = 0$, então, do Exercício 3.3,

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} |f(x,y)| = 0,$$

logo, $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} M|f(x,y)| = M.0 = 0$. Como as funções 0 e $M|f(x,y)|$ tendem a zero quando (x,y) tende a $(0,0)$, das desigualdades (3.11) e do Teorema do Sanduiche, concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} |f(x,y)g(x,y)| = 0$$

e do Exercício 3.3, temos $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)g(x,y) = 0$.

□

Exemplo 3.7 Mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \text{ sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Solução Para todo $(x,y) \neq (0,0)$, temos $\left|\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 1$, logo, temos a seguinte desigualdade: $\left|x \text{ sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |x|$, portanto,

$$0 \leq \left|x \text{ sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| = |x| \left|\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |x|,$$

ou seja,

$$0 \leq \left|x \text{ sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |x|.$$

Como as funções 0 e $|x|$ tendem a zero quando (x,y) tende a $(0,0)$, das desigualdades acima e do Teorema do Sanduiche, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|x \text{ sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| = 0$$

e do Exercício 3.3, concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \text{ sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

□

Exemplo 3.8 Calcule o seguinte limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}.$$

Solução Note que $x^2 \leq x^2+y^2$, logo, $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$, portanto, elevando esta desigualdade à terceira potência, temos

$$0 \leq |x|^3 \leq (x^2+y^2)^{3/2}.$$

Dividindo estas desigualdades por $x^2 + y^2$, obtemos

$$0 \leq \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se fizermos $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, as desigualdades acima podem ser reescritas como

$$0 \leq |f(x, y)| = \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Ou seja,

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Como $|f(x, y)|$ está entre duas funções que tendem a zero quando (x, y) tende a $(0, 0)$, segue-se do Teorema do Sanduiche que $|f(x, y)|$ tende a zero quando (x, y) tende a zero e, em virtude do Exercício 3.3, o mesmo acontecerá com $f(x, y)$.

□

Observação 3.1 (**O teste dos dois caminhos**) Diferentemente do que ocorre na reta, no plano existem infinitas maneiras de nos aproximarmos de um dado ponto (x_o, y_o), a existência do limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y) \tag{3.12}$$

significa que ele não deve depender de como nos aproximamos do ponto (x_o, y_o). Em particular, se ao aproximarmos de (x_o, y_o) através de dois caminhos diferentes a função $f(x, y)$ tender a valores diferentes, então o limite (3.12) não existirá.

Exemplo 3.9 Mostre que $\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}$ não existe.

Solução Seja

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

(veja a Figura 3.2).
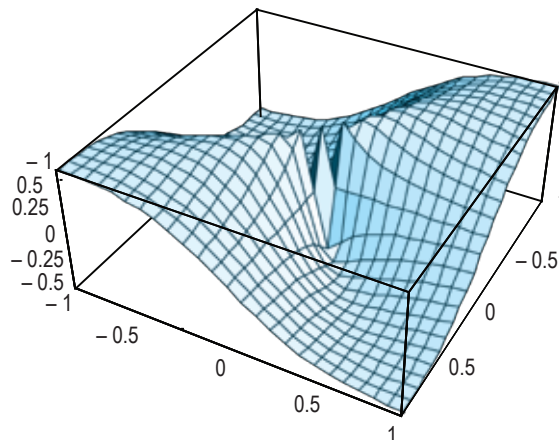
Figura 3.2: Gráfico $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$.

Vejamos o que acontecerá com os valores de $f(x,y)$ quando nos aproximamos da origem através das retas $y = ax$, onde a é um número real fixo. Ao longo de tais retas, temos $f(x,y) = f(x,ax) = \frac{a}{1+a^2}$, logo,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{(ao longo da reta } y=ax)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,ax) = \lim_{x\to 0} \frac{a}{1+a^2} = \frac{a}{1+a^2}.$$

Isto significa que ao aproximarmos de $(0,0)$ através das retas $y = ax$, $f(x,y)$ tenderá a valores diferentes, dependendo da escolha de a. Portanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

□

Exemplo 3.10 Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe.

Solução Seja

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

então, ao longo da reta $y = 0$, $f(x,y) = f(x,0) = 0$, logo,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo da reta } y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Por outro lado, ao longo da parábola, $x = y^2$, temos

$$f(x,y) = f(y^2,y) = 1/2,$$

logo,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{(ao longo da parábola } x=y^2)}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0} 1/2 = 1/2.$$

Portanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

□

Observação 3.2 Vale a pena ressaltar que o Teste dos Dois Caminhos nos permite provar **a não existência** do limite. No entanto, o fato de

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_o,y_o)\\ (x,y)\in C_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_o,y_o)\\ (x,y)\in C_2}} f(x,y),$$

onde C_1 e C_2 são dois caminhos distintos passando por (x_o,y_o), não quer dizer que o limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$$

exista.

Exercício 3.4 Mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

não existe.
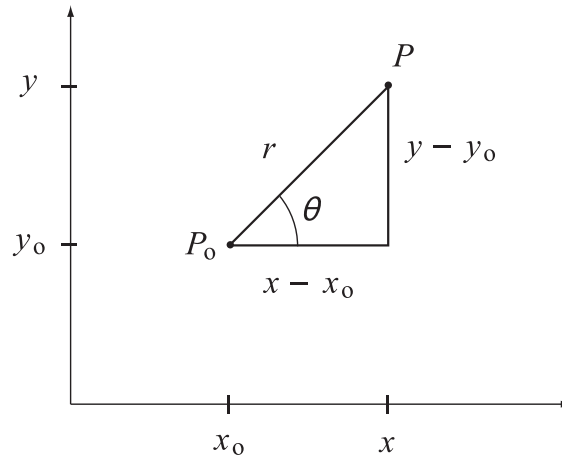
Figura 3.3: Coordenadas polares.

Observação 3.3 No cálculo de

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y),$$

muitas vezes é conveniente fazermos mudança de coordenadas cartesianas para **coordenadas polares**, a qual descreveremos a seguir.

Seja r a distância entre os pontos $P_o(x_o, y_o)$ e $P(x,y)$ e θ o ângulo que o semieixo dos x positivos faz com $\overline{P_oP}$, medido no sentido anti-horário. Então, temos (veja a Figura 3.3),

$$x = x_o + r\cos\theta \;\; e \;\; y = y_o + r\,sen\,\theta.$$

Como (x,y) tende (x_o, y_o) se, e somente se, a distância de (x,y) a (x_o, y_o) tender a zero e esta vale r, então,

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$$

é equivalente a

$$\lim_{r\to 0^+} f(x_o + r\cos\theta, y_o + r \text{ sen } \theta),$$

o qual existirá se, e somente se, ele não depender de θ. A dependência em θ neste limite implicará que $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$ não existe, por quê?

Exemplo 3.11 Mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Solução Seja

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Se introduzirmos as coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = rsen\,\theta$, teremos

$$0 \leq |f(x,y)| = |f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)| = \left|rsen\,\theta\cos\theta\right| \leq r,$$

pois as funções $\cos\theta$ e senθ são limitadas em módulos por 1. Como $|f(x,y)|$ está entre duas funções que tendem a zero quando r tende a zero, segue-se do Teorema do Sanduiche que $|f(x,y)|$ tende a zero quando r tende a zero e, em virtude do Exercício 3.3, o mesmo acontecerá com $f(x,y)$.

□

Exercício 3.5 Resolva o Exercício 3.8 usando coordenadas polares.

Exercício 3.6 Calcule os seguintes limites.

a) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} (3xy + xy^2 + 3x)$

b) $\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\cos(3xy)}{\sqrt{x^2+2}}$.

Exercício 3.7 Calcule o limite, se ele existir, ou mostre que ele não existe.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2}$

d) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$

e) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2-4x+4}{xy-2y-x+2}$

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\operatorname{sen}^2 y}{2x^2+y^2}$

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{4x^4+y^4}$

h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}$.

Exercício 3.8 Use coordenadas polares para calcular os limites abaixo, caso eles existam.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$.

3.3 CONTINUIDADE

O conceito de continuidade para funções de uma variável já foi visto. A seguir o estenderemos para funções de duas variáveis. A sua extensão para funções de mais de duas variáveis será imediata.

Definição 3.3 *Seja f definida numa vizinhança de (x_o, y_o). Dizemos que f é **contínua** em (x_o, y_o) se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = f(x_o, y_o).$$

Dizemos que f é contínua num conjunto D, se ela for contínua em todos os pontos de D.

Teorema 3.3 (**Propriedades da continuidade**) Suponha que f e g sejam contínuas no ponto (x_o, y_o) e seja c uma constante. Então,

1. as funções cf, $f+g$ e fg também serão contínuas em (x_o, y_o),
2. se $g(x_o, y_o) \neq 0$, então, f/g também será contínua em (x_o, y_o) e
3. se $h(z)$ for uma função de uma variável que é contínua em $z_o = f(x_o, y_o)$, então, a composta $h(f(x,y))$ também será contínua em (x_o, y_o).

O Teorema anterior segue diretamente das propriedades de limite.

Do Teorema 3.3 e das Equações (3.8) e (3.9), segue-se que polinônimos nas variáveis x, y são funções contínuas em todo o plano e que o quociente destes é uma função contínua naqueles pontos onde o denominador não se anula.

Exemplo 3.12 Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$.

Solução Vimos no Exemplo 3.8 que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, logo, f é contínua em $(0,0)$.

□

Exemplo 3.13 Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que $f(x,y)$ é contínua em todos os pontos.

Solução Já vimos que a função de uma variável $h(z) = \sqrt{z}$ é contínua para todo $z > 0$ e a função $g(x,y) = x^2 + y^2$ é contínua em todos os pontos, pois ela é um polinônio. Logo, do item 3 do Teorema 3.3, a composta $h(g(x,y)) = \sqrt{x^2+y^2}$ será contínua nos pontos (x,y) para os quais $g(x,y) = x^2 + y^2 > 0$, ou seja, $(x,y) \neq (0,0)$. Em tais pontos, temos $h(g(x,y)) > 0$. Portanto, do item 2 do Teorema 3.3, $f(x,y)$ será contínua nos mesmos, por ser o quociente de duas funções contínuas, cujo denominador não se anula.

Resta-nos mostrar a continuidade de $f(x,y)$ em $(0,0)$. Vimos no Exemplo 3.11 que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, logo, f é contínua em $(0,0)$.

□

Exemplo 3.14 Mostre que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{3.13}$$

é contínua em todos os pontos. Veja o gráfico de $f(x,y)$ na Figura 3.4.

Solução Para $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y)$ é a razão de dois polinômios, sendo que o denominador, $x^2 + y^2$, não se anula em tais pontos, portanto, $f(x,y)$ é contínua nos mesmos.

Resta-nos mostrar que $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$. Como $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, segue–se que $\frac{x^2|y|}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y|$. Portanto, para $(x,y) \neq (0,0)$, temos $|f(x,y)| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq |y|$. Logo,

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |y|.$$

Das desigualdades acima, do Teorema do Sanduiche e do Exercício 3.3, segue-se que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$, portanto, $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$.

$\square$

Vimos no Exemplo 3.10 que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe, logo, se $f(x,y)$ for uma função definida no plano todo, tal que $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, ela não poderá ser estendida de modo a ficar contínua na origem, independentemente de como a definamos neste ponto, pois para que uma função seja contínua num ponto (x_o,y_o), o limite $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$ deve existir (veja a Definição 3.3).
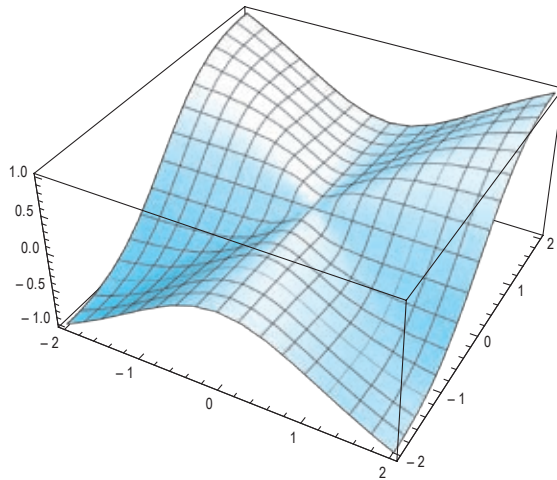
Figura 3.4: Gráfico $f(x,y)$ dada em (3.13).

Teorema 3.4 Se $f(x,y)$ for contínua em (x_o,y_o), então $f(x,y)$ é limitada numa vizinhança deste ponto.

Prova Como f é contínua em (x_o,y_o), então

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = f(x_o,y_o).$$

Tomando $\epsilon = 1$ na definição de limite, existe $\delta > 0$, tal que se

$$\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2} < \delta,$$

então,

$$|f(x,y) - f(x_o,y_o)| < 1. \tag{3.14}$$

Portanto, se $(x,y) \in B(x_o,y_o;\delta)$, segue da desigualdade triangular ($|a-b| \leq |a|+|b|$, onde a e b são números reais quaisquer) e da desigualdade (3.14), temos

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= |(f(x,y)-f(x_o,y_o)) + f(x_o,y_o)| \\ &\leq |(f(x,y)-f(x_o,y_o)| + |f(x_o,y_o)| \\ &< 1 + |f(x_o,y_o)|. \end{aligned}$$

$\square$

Do Teorema 3.4, segue-se que se uma função se tornar ilimitada quando nos aproximamos de um dado ponto do seu domínio, então ela não pode ser contínua neste ponto. Por exemplo, seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

então, ao longo do eixo x, temos $f(x,y) = f(x,0) = \frac{1}{x}$, a qual se torna ilimitada à medida que nos aproximamos da origem. Portanto, $f(x,y)$ não pode ser contínua em $(0,0)$.

Exercício 3.9 Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{3.15}$$

Mostre que f é contínua em todos os pontos. Veja o gráfico de $f(x,y)$ na Figura 3.5.
(**Sugestão: use coordenadas polares**)
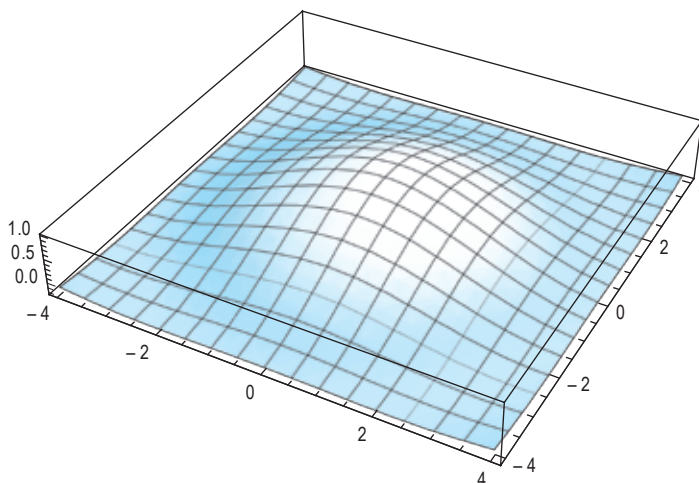
Figura 3.5: Gráfico $f(x,y)$ dada em (3.15).

Exercício 3.10 Descreva o conjunto dos pontos (x,y) nos quais f é contínua.

a) $f(x,y) = \ln(x+y-1)$

b) $f(x,y) = \frac{x^3-xy+y^2}{x^2-y^2}$

c) $f(x,y) = \sqrt{x}\, e^{\sqrt{4-y^2}}$

d) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

e) $f(x,y) = \frac{x+2y}{sen(x+y)-\cos(x-y)}$

f) $f(x,y) = x\ sen\,(y/x)$

g) $f(x,y) = \ln(\ln(x+y))$.

Exercício 3.11 Use o item 3 do Teorema 3.3 para determinar que $g(x,y) = h(f(x,y))$ é contínua, onde f e h são dadas abaixo.

a) $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$ e $h(u) = (u^2 - 2)/u$

b) $f(x,y) = x + y - 1$ e $h(u) = \ln(u+2)$

c) $f(x,y) = x + \text{tg}(y)$ e $h(u) = u^2 + u$

d) $f(x,y) = 2y \ln x$ e $h(u) = e^u$.

Exercício 3.12 Discuta a continuidade da seguinte função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercício 3.13 Mostre que se $f(x,y)$ for contínua em (x_o, y_o) e $f(x_o, y_o) > 0$, então existe $\delta > 0$, tal que $f(x,y) > 0$, para todo $(x,y) \in B(x_o, y_o; \delta)$.

AULA 4

Derivadas parciais

OBJETIVOS

No final desta aula, o aluno deverá ser capaz de:

1. Compreender o significado geométrico das derivadas parciais para funções de duas ou mais variáveis.
2. Calcular derivadas parciais de qualquer ordem de uma função de duas ou mais variáveis.

4.1 REVISÃO DO CONCEITO DE DERIVADA PARA FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL

No estudo de funções de uma variável, introduzimos o conceito de derivada, o qual é muito útil nas aplicações, por causa da sua interpretação como taxa de variação de uma função. Nesta aula estenderemos a noção de derivada para funções de duas variáveis.

Antes de prosseguirmos com a nossa discussão, voltemos ao caso em que f é uma função de uma variável. Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo aberto da reta. Seja x_o um ponto de I, então, ao passarmos deste ponto para outro ponto $x \in I$, a variação de f é $\Delta f = f(x) - f(x_o)$. Dividindo esta variação pelo acréscimo $\Delta x = x - x_o$ da variável independente, obtemos o quociente de Newton

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_o)}{\Delta x}.$$

Se o limite do quociente acima, quando Δx tender a 0 existir, ele será chamado de derivada de f no ponto x_o e será denotado por $f'(x_o)$ ou $\frac{df}{dx}(x_o)$. Se fizermos $x = x_o + h$, podemos também escrever

$$f'(x_o) = \frac{df}{dx}(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}.$$

Exercício 4.1 Calcule as derivadas das seguinte funções (você pode usar as propriedades de derivadas estudadas anteriormente).

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x$ b) $f(x) = \cos(2x^2 + 1)$ c) $f(x) = x^4 \operatorname{sen}(x^3 + 2x)$

d) $f(x) = \frac{x^2+\cos(x)}{x^2+1}$ e) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2 + 1)$ f) $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 3}$

g) $f(x) = \ln(x^3 + 2)$.

4.2 DEFINIÇÃO DE DERIVADAS PARCIAIS E AS SUAS PROPRIEDADES

Voltemos agora ao caso em que f é uma função de duas variáveis.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$, onde D é uma região aberta de $\mathbb{R}^2$ contendo ponto (x_o, y_o). A variação de f ao passarmos deste ponto para outro ponto $(x, y) \in D$ é dada por

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_o, y_o),$$

por outro lado, a variação das variáveis independentes, a qual denotaremos por Δs, é a distância entre (x_o, y_o) e (x, y). O análogo ao quociente de Newton seria

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{f(x, y) - f(x_o, y_o)}{\Delta s}.$$

O passo seguinte seria tomarmos o limite deste quociente quando (x, y) tendesse a (x_o, y_o). Contudo, no plano existem infinitas maneiras do ponto variável (x, y) se aproximar de (x_o, y_o); por exemplo, poderíamos tomar uma curva no plano que passasse por (x_o, y_o) e nos aproximarmos deste ao longo desta curva. Por causa disso, ao tomarmos o limite do quociente de Newton acima quando (x, y) tende a (x_o, y_o), temos que dizer como fazemos tal aproximação, isto nos levará aos conceitos de derivadas parciais e de derivada direcional. Em ambos os casos faremos (x, y) tender a (x_o, y_o) ao longo de uma reta que passa por este ponto. Como veremos, as derivada parciais serão casos particulares da derivada direcional quando nos aproximamos de (x_o, y_o) ao longo das retas $y = y_o$ e $x = x_o$.

Definição 4.1 *Seja f definida numa vizinhança do ponto (x_o, y_o). Se o limite*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x, y_o) - f(x_o, y_o)}{x - x_o}$$

existir, ele será chamado de ***derivada parcial de f em relação*** *x no ponto (x_o, y_o), o qual denotaremos por $f_x(x_o, y_o)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$. De maneira análoga, se o limite*

$$\lim_{y \to y_o} \frac{f(x_o, y) - f(x_o, y_o)}{y - y_o}$$

existir, ele será chamado de ***derivada parcial de f em relação*** *y no ponto (x_o, y_o), o qual denotaremos por $f_y(x_o, y_o)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$.*

As derivadas parciais $f_x(x_o, y_o)$ e $f_y(x_o, y_o)$ representam as taxas de variações de $f(x, y)$ no ponto (x_o, y_o) em relação às direções horizontal e vertical, respectivamente.

Note que no cálculo de $f_x(x_o, y_o)$, aproximamo-nos do ponto (x_o, y_o) ao longo do reta $y = y_o$, ou seja, a variável y não muda, seu valor é sempre igual a y_o. Portanto, ao longo desta reta, $f(x, y)$ é uma função apenas de x, a qual denotaremos por $g(x)$, ou seja, $g(x) = f(x, y_o)$. Então,

$$f_x(x_o, y_o) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_o + h) - g(x_o)}{h} = g'(x_o).$$

De maneira análoga, no cálculo de $f_x(x_o, y_o)$, aproximamo-nos de (x_o, y_o) ao longo do reta $x = x_o$, ou seja, a variável x não muda, seu valor é sempre igual a x_o. Portanto, ao longo desta reta, $f(x, y)$ é uma função apenas de y, a qual denotaremos por $w(y)$, ou seja, $w(y) = f(x_o, y)$. Então,

$$f_y(x_o, y_o) = \lim_{h \to 0} \frac{w(y_o + h) - w(y_o)}{h} = w'(y_o).$$

Resumindo, embora tenhamos introduzido um conceito novo, sob o ponto de vista operacional, não há nada de novo. Mais precisamente, para calcularmos $f_x(x, y)$, na expressão de $f(x, y)$ olhamos para y como se fosse uma constante e calculamos a derivada de uma função de uma variável apenas, ou seja, da variável x. De maneira análoga, o problema de calcular $f_y(x, y)$ reduz-se ao cálculo da derivada de uma função apenas da variável y, ou seja, na expressão de $f(x, y)$ tratamos x como se fosse uma constante. Por isso, sugerimos que o aluno faça uma revisão de como calcular derivadas de funções de uma variável.

Da mesma forma que na derivação de uma função de uma variável, as derivadas parciais de $f(x, y)$ em relação a x e a y são **operações lineares**, ou seja, se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ forem duas funções cujas derivadas parciais em relação a x existem e c uma constante qualquer, então,

- $\frac{\partial}{\partial x}(c\, f(x, y)) = c\, \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ e
- $\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) + g(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} g(x, y)$.

De maneira análoga, se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ forem duas funções cujas derivadas parciais em relação a y existem e c uma constante qualquer, então,

- $\frac{\partial}{\partial y}(c\, f(x, y)) = c\, \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ e
- $\frac{\partial}{\partial y}(f(x, y) + g(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} g(x, y)$.

A **linearidade** segue imediatamente das suas definições das derivadas parciais.

Exemplo 4.1 *Seja $f(x, y) = e^y \cos(xy)$, calcule $f_x(0, 0)$ e $f_y(1, 0)$.*

Solução Tratando y como uma constante na expressão de $f(x, y)$ e a derivando em relação a x, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^y \cos(xy)\right) = e^y \left(\frac{\partial}{\partial x}\ \cos(xy)\right) = -y e^y \operatorname{sen}(xy).$$

De maneira análoga, tratando x como uma constante na expressão de $f(x,y)$ e a derivando em relação a y, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y \cos(xy)\right)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} e^y\right)\cos(xy) + e^y\left(\frac{\partial}{\partial y}\cos(xy)\right)\\ &= \left(\cos(xy) - x\,\text{sen}(xy)\right)e^y.\end{aligned}$$

Portanto, $f_x(x,y) = -ye^y\,\text{sen}(xy)$ e $f_y(x,y) = (\cos(xy) - x\,\text{sen}(xy))\,e^y$, em particular,

$$f_x(0,0) = 0 \ \ e \ \ f_y(1,0) = 1.$$

□

Exemplo 4.2 *Calcule $f_x(1,\pi)$, onde $f(x,y) = x^2 + \cos x \cos y - \ln(xy)$.*

Solução Usando a linearidade da derivada parcial, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\cos x \cos y) - \frac{\partial}{\partial x}\ln(xy) = 2x - \text{sen} x \cos y - 1/x.$$

Portanto, $f_x(x,y) = 2x - \text{sen} x \cos y - 1/x$, em particular,

$$f_x(1,\pi) = (2)(1) - \text{sen}(\pi)\cos(1) - 1 = 1.$$

□

Para derivadas parciais também valem as regras usuais de derivação de funções de uma variável, ou seja, valem as regras para derivação de um produto e de um quociente de duas funções:

- $\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)g(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\ g(x,y) + f(x,y)\ \frac{\partial}{\partial x} g(x,y)$
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\ g(x,y) - f(x,y)\ \frac{\partial}{\partial x} g(x,y)}{(g(x,y))^2}.$

Temos relações similares para a derivada parcial em relação a y.

Exemplo 4.3 *Calcule $\left(\frac{xy^2 - x^3}{y\cos x + y^4}\right)_y$*

Solução

$$\begin{aligned}\left(\frac{xy^2 - x^3}{y\cos x + y^4}\right)_y &= \frac{(xy^2 - x^3)_y\ (y\cos x + y^4) - (xy^2 - x^3)(y\cos x + y^4)_y}{(y\cos x + y^4)^2}\\ &= \frac{2xy(y\cos x + y^4) - (xy^2 - x^3)(\cos x + 4y^3)}{(y\cos x + y^4)^2}\end{aligned}$$

□

Exemplo 4.4 *Seja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) \neq (0,0). \end{cases} .$$

Mostre, a partir da definição de derivadas parciais, que $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$.

Solução Note que

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

e

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

□

Exercício 4.2 Calcule f_x e f_y, onde $f(x,y)$ é dada abaixo.

a) $f(x,y) = (x^3 - y^2)^6$

b) $f(x,y) = xe^y + y\,\mathrm{sen} x$

c) $f(x,y) = (x^3 - y^2)^6$

d) $f(x,y) = xe^y + y\,\mathrm{sen} x$

e) $f(x,y) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$

f) $f(x,y) = \frac{x^2}{x+y}$

g) $f(x,y) = x^5 - 3x^3y + 2xy^2 - 3xy + 4y$

h) $f(x,y) = (x^3 + y^3)(x - y)$

i) $f(x,y) = (x^2 + xy + y^3)^3$

j) $f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{2}{xy}$

k) $f(x,y) = \mathrm{sen}(x+y) + \cos(x-y)$

l) $f(x,y) = \mathrm{arcsen}\,(x/y)^2$

m) $f(x,y) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^y + e^{-y}}$

n) $f(x,y) = x^y + y^x$

o) $f(x,y) = \int_0^{\cos x - 2y^2} \cos t \; dt$

p) $f(x,y) = \ln(x \;\mathrm{tg} y)$.

Exercício 4.3 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre, usando a definição de derivadas parciais, que $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$.

4.3 A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS

O gráfico de $z = f(x,y)$ representa uma superfície no espaço, a qual denotaremos por S. Se (a,b,c) for um ponto de S, então $c = f(a,b)$.

Seja C_1 a curva interseção do plano $y = b$ com S. Ou seja, no plano $y = b$, temos a curva C_1, a qual é o gráfico de $z = f(x,b) \equiv g(x)$. Do estudo de funções de uma variável, sabemos que $g'(a)$ é o coeficiente da reta tangente a C_1 no ponto (a,b), mas

$$g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = f_x(a,b).$$

Assim, $f_x(a,b)$ é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva que é a interseção do gráfico de $f(x,y)$ com o plano $y = b$, no ponto $(a,b,f(a,b))$.
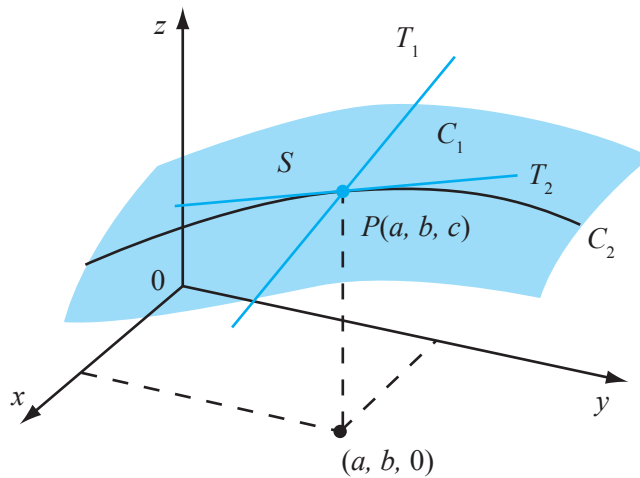
Figura 4.1: Interpretação geométrica das derivadas parciais $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$.

De maneira análoga, seja C_2 a curva interseção do plano $x = a$ com a superfície S. Ou seja, no plano $x = a$, temos a curva C_2, a qual é o gráfico de $z = f(a, y) \equiv w(y)$. Sabemos que $w'(b)$ é o coeficiente da reta tangente a C_2, no ponto (a, b), mas

$$w'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{w(b+h) - w(b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a,b)}{h} = f_y(a,b).$$

Assim, $f_y(a, b)$ é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva que é a interseção do gráfico de $f(x, y)$ com o plano $x = a$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Em resumo, podemos interpretar as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ como sendo os coeficientes angulares das retas T_1 e T_2, que são as tangentes às curvas obtidas pelas interseções de S com os planos $y = b$ e $x = a$, repectivamente, no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Conforme será visto na Seção 5.3, as retas tangentes T_1 e T_2 determinam um plano, o qual chamaremos de **plano tangente a** S **no ponto** $(a, b, f(a, b))$.

Exercício 4.4 *Calcular a inclinação da tangente à curva segundo a qual o plano $y = 1$ corta a superfície $z = x^2 + y^2$, no ponto $(2, 1, 5)$.*

4.4 DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

Como f_x e f_y também são funções das variáveis x e y, podemos derivá-las parcialmente em relação às variáveis x e y, casos estas derivadas existam. Em outras palavras, calculamos $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$, as quais denotaremos por f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} e f_{yy}, respectivamente. Com isso temos as derivadas parciais de segunda ordem de f. Podemos tomar derivadas parciais destas com relação a x e y, caso elas existam, e obter derivadas parciais de terceira ordem de f, ou seja, f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx}, f_{xyy}, f_{yxx}, f_{yxy}, f_{yyx} e f_{yyy}.

Repetindo o procedimento acima, podemos obter derivadas parciais de ordens superiores.

Também denotaremos f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} e f_{yy} por $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$, respectivamente. Temos notações similares para derivadas de ordens superiores, por exemplo, $f_{yxxyx} = \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y \partial^2 x \partial y}$.

Exemplo 4.5 *Calcule f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} e f_{xxx}, onde $f(x,y) = xy^3 - x^4$.*

Solução $f_x = y^3 - 4x^3$, $f_{xx} = -12x^2$, $f_{xy} = 3y^2$, $f_{xxx} = -24x$, $f_y = 3xy^2$, $f_{yx} = 3y^2$ e $f_{yy} = 6xy$.

□

Exemplo 4.6 *Seja $f(x,y) = \text{sen}(xy)$. Calcule todas as derivadas parciais de primeira e segunda ordens de $f(x,y)$, bem como f_{xxy}.*

Solução

$$\begin{aligned}
f_x &= y\cos(xy) \\
f_y &= -x\cos(xy) \\
f_{xx} &= -y^2\,\text{sen}(xy) \\
f_{xy} &= \cos(xy) - xy\,\text{sen}(xy) \\
f_{yx} &= \cos(xy) - xy\,\text{sen}(xy) \\
f_{yy} &= -x^2\,\text{sen}(xy) \\
f_{xxy} &= -xy^2\cos(xy).
\end{aligned}$$

□

Exercício 4.5 Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem da função

$$f(x,y) = e^x\,\text{sen}y + \ln(xy).$$

Note que nos Exemplos 4.5 e 4.6, temos $f_{xy} = f_{yx}$, ou seja, a ordem das derivadas parciais em relação a x e y não foi importante. Teria isto sido uma coincidência? A resposta a esta pergunta é dada no teorema abaixo, o qual será apenas enunciado.

Teorema 4.1 (**Teorema de Clairaut**) Seja $f(x,y)$ definida numa bola aberta $B(x_o, y_o; r)$. Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em $B(x_o, y_o; r)$, então,

$$f_{xy}(x_o, y_o) = f_{yx}(x_o, y_o).$$

Exercício 4.6 É possivel existir uma função f, tal que $f_x(x,y) = x + 3y$ e $f_y(x,y) = 5x - y$ e cujas derivadas de segunda ordem sejam contínuas?

Exercício 4.7 A hipótese de continuidade de f_{xy} e f_{yx} é essencial no Teorema de Clairaut. De fato, seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calcule f_x e f_y em todos os pontos.

(b) Mostre que $f_{xy}(0,0) = -1$ e $f_{yx}(0,0) = 1$.

Exercício 4.8 Dizemos que uma função $f(x, y)$ é **harmônica** se

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

em todo o seu domínio. Mostre que as funções abaixo são harmônicas.

a) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$

c) $f(x, y) = \cos x \, \text{senh} y + \text{sen} x \, \cosh y$

d) $f(x, y) = e^{-x} \cos y + e^{-y} \cos x$.

Exercício 4.9 *Se* $w = \cos(x - y) + \ln(x + y)$, *mostre que*

$$w_{xx} - w_{yy} = 0.$$

Exercício 4.10 Dizemos que $u(x, t)$ satisfaz a **equação da onda** se

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

onde c é uma constante positiva. Mostre que as funções abaixo satisfazem a equação da onda.

(a) $u(x, t) = \text{sen}(ckt) \, \text{sen}(kx)$, onde k é uma constante.

(b) $u(x, t) = (x - ct)^4 + \cos(x + ct)$.

4.5 DERIVADAS PARCIAIS DE FUNÇÕES MAIS DE DUAS VARIÁVEIS

A seguir estenderemos o conceito de derivadas parciais para funções de três variáveis. A extensão deste conceito para funções de mais de três variáveis é imediata.

Definição 4.2 (Derivadas parciais para funções de três variáveis) Seja f definida numa vizinhança do ponto (x_o, y_o, z_o), se o limite

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x, y_o, z_o) - f(x_o, y_o, z_o)}{x - x_o}$$

existir, ele será chamado de **derivada parcial de** f **em relação** x no ponto (x_o, y_o, z_o), o qual denotaremos por $f_x(x_o, y_o, z_o)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o)$.
Se o limite

$$\lim_{y \to y_o} \frac{f(x_o, y, z_o) - f(x_o, y_o, z_o)}{y - y_o}$$

existir, ele será chamado de **derivada parcial de** f **em relação** y no ponto (x_o, y_o, z_o), o qual denotaremos por $f_y(x_o, y_o, z_o)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o)$.

Finalmente, se o limite

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(x_o, y_o, z) - f(x_o, y_o, z_o)}{z - z_o}$$

existir, ele será chamado de **derivada parcial de f em relação a z** no ponto (x_o, y_o, z_o), o qual denotaremos por $f_z(x_o, y_o, z_o)$ ou $\frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o)$.

Para uma função de três variáveis, valem as mesmas observações que foram feitas para funções de duas variáveis: ao tomarmos a derivada parcial em relação a uma das variáveis, as outras duas variáveis são tratadas como constantes e tudo se passa como se estivéssemos calculando a derivada de uma função de apenas uma variável.

Exemplo 4.7 Seja $f(x, y, z) = x^2yz - \cos(xyz^2)$. Calcule f_x, f_y e f_z.

Solução

$$\begin{aligned} f_x &= 2xyz + yz^2 \operatorname{sen}(xyz^2), \\ f_y &= x^2z + xz^2 \operatorname{sen}(xyz^2), \\ f_z &= x^2y + 2xyz \operatorname{sen}(xyz^2). \end{aligned}$$

□

Exercício 4.11 Calcule f_x, f_y e f_z, onde $f(x, y, z)$ é dada abaixo.

a) $f(x, y, z) = (x^3 - y^2 + z^2)^6$

b) $f(x, y, z) = xze^y + y \operatorname{sen}(z^2)$

c) $f(x, y, z) = (x^3 - y^2 + z)^6$

d) $f(x, y, z) = xe^{yz} + y \operatorname{sen} x$

e) $f(x, y, z) = \frac{yz}{x}$

f) $f(x, y, z) = \frac{z^2}{x+y}$

g) $f(x, y, z) = x^5z - 2xy^2 - 3xyz + 4y$

h) $f(x, y, z) = (x^3 + z^3)(x - y)$

i) $f(x, y, z) = (x^2 + xy + z^3)^3$

j) $f(x, y, z) = \frac{yz}{x} - \frac{2}{xy}$

k) $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)$

l) $f(x, y, z) = \operatorname{arcsen}(xyz)$

m) $f(x, y, z) = \frac{e^y + e^z}{e^x + e^{-y}}$

n) $f(x, y, z) = x^{yz}$

o) $f(x, y, z) = \int_0^{\cos x - 2y^2 + z} \cos t \, dt$

p) $f(x, y, z) = \ln(xy \operatorname{tg} z)$.

AULA 5

Diferenciabilidade de funções de várias variáveis

OBJETIVOS
No final desta aula, o aluno deverá ser capaz de:
1. Compreender o significado de diferenciabilidade para uma função de duas ou mais variáveis, bem como as consequências da diferenciabilidade.
2. Calcular o plano tangente a uma superfície que é o gráfico de uma função de duas variáveis.
3. Calcular a diferencial de uma função, bem como aproximar a variação de uma função pela sua diferencial.

5.1 REVISÃO DO CONCEITO DE DIFERENCIABILIDADE PARA FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL

Antes de introduzirmos o conceito de diferenciabilidade para funções de duas ou mais variáveis, vamos rever quais as consequências de diferenciabilidade para uma função de uma variável. Dizemos que $y = f(x)$, definida num intervalo aberto contendo x_o é **diferenciável em** x_o, se o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

existir, neste caso, o denotamos por $f'(x_o)$. Portanto, se f for diferenciável em x_o, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} - f'(x_o) \right) = 0.$$

Portanto, se denotarmos a quantidade

$$\frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} - f'(x_o)$$

por $\epsilon(\Delta x)$, então $\epsilon(\Delta x)$ tende a zero quando Δx tende a zero. Ou seja, f é diferenciável em x_o se, e somente se, pudermos escrever

$$f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + f'(x_o)\Delta x + \epsilon\ \Delta x. \qquad (5.1)$$

Exemplo 5.1 Seja $f(x) = x^2 - x$, encontre a função $\epsilon(\Delta x)$ que aparece em (5.1).

Solução.

$$\begin{aligned} f(x_o+\Delta x) &= (x_o+\Delta x)^2-(x_o+\Delta x) \\ &= x_o^2-x_o+(2x_o-1)\Delta x+(\Delta x)(\Delta x) \\ &= f(x_o)+f'(x_o)\Delta x+\epsilon\ \Delta x, \end{aligned}$$

onde $\epsilon = \Delta x$.

Uma consequência da diferenciabilidade de uma função de uma variável é a continuidade, ou seja, se $y = f(x)$ for derivável em x_o, então, de (5.1), temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_o+\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0}(f(x_o)+f'(x_o)\Delta x+\epsilon\Delta x) = f(x_o),$$

o que mostra que f é contínua em x_o.

5.2 DIFERENCIABILIADADE PARA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

Conforme havíamos observado, a diferenciabilidade de uma função de uma variável implica continuidade da mesma. Por outro lado, a existência das derivadas parciais $f_x(x_o, y_o)$ e $f_y(x_o, y_o)$ não implica em continuidade de $f(x, y)$ no ponto (x_o, y_o), como mostra o seguinte exemplo. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Vimos no Exemplo 3.9 que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe, logo, $f(x, y)$ não pode ser contínua em $(0, 0)$. Por outro lado, no Exemplo 4.4, vimos que $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$. Por isso, para funções de duas variáveis, se quisermos definir a diferenciabilidade de modo que ela implique continuidade, devemos exigir mais do que existência das suas derivadas parciais de primeira ordem.

Definição 5.1 (**Diferenciabilidade para função de duas variáveis**) Seja $z = f(x, y)$, tal que suas derivadas parciais $f_x(x_o, y_o)$ e $f_y(x_o, y_o)$ existam. Dizemos que f é **diferenciável** em (x_o, y_o), se

$$\begin{aligned} f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y) &= f(x_o,y_o)+f_x(x_o,y_o)\Delta x+f_y(x_o,y_o)\Delta y \\ &\quad +\epsilon_1\ \Delta x+\epsilon_2\ \Delta y, \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são funções de Δx e Δy, as quais tendem a zero quando Δx e Δy tendem a zero.

Da definição acima, se $f(x, y)$ for diferenciável em (x_o, y_o), então ela será contínua neste ponto. Portanto, se uma função não for contínua num ponto ela não pode ser diferenciável no mesmo.

Exemplo 5.2 Encontre expressões para ϵ_1 e ϵ_2 dados em (5.2), onde $f(x, y) = 3x^2 - xy$.

Solução Note que

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y) - f(x_o,y_o)\\ &= (3(x_o+\Delta x)^2 - (x_o+\Delta x)(y_o+\Delta y)) - (3x_o^2 - x_o y_o)\\ &= (6x_o - y_o)\Delta x - x_o\Delta y + 3(\Delta x)^2 - \Delta x\Delta x,\end{aligned}$$

portanto, as funções ϵ_1 e ϵ_2 não são únicas, pois se escrevermos

$$\Delta z = (6x_o - y_o)\Delta x + (-x_o)\Delta y + (3\Delta x)\Delta x + (-\Delta x)\Delta y,$$

teremos $\epsilon_1 = 3\Delta x$ e $\epsilon_2 = -\Delta x$. Por outro lado, se escrevermos

$$\Delta z = (6x_o - y_o)\Delta x + (-x_o)\Delta y + (3\Delta x - \Delta y)\Delta x + (0)\Delta y,$$

teremos $\epsilon_1 = 3\Delta x - \Delta y$ e $\epsilon_2 = 0$.

□

A Definição 5.1 não parece ser muito prática e o leitor pode fazer a seguinte pergunta: existe algum critério simples para decidirmos se uma função $f(x,y)$ é diferenciável num ponto (x_o,y_o)? A resposta a esta pergunta é dada pelo teorema seguinte, o qual é uma consequência do Teorema do Valor Médio para função de uma variável.

Teorema 5.1 *Se f_x e f_y existirem numa vizinhança de (x_o,y_o) e forem contínuas neste ponto, então $f(x,y)$ será diferenciável em (x_o,y_o).*

Uma consequência do Teorema 5.1 é que se as derivadas f_x e f_y forem contínuas numa vizinhança de um ponto, então f tem que ser contínua na mesma, visto que diferenciabilidade implica continuidade.

Exemplo 5.3 *Mostre que $f(x,y) = e^x\cos(xy)$ é diferenciável em $(0,0)$.*

Solução Note que

$$f_x = e^x(\cos(xy) - y\,\mathrm{sen}(xy)) \text{ e } f_y = -xe^x\mathrm{sen}(xy),$$

as quais são contínuas para todo (x,y), portanto, pelo Teorema 5.1, $f(x,y)$ é diferenciável em todo o plano.

□

5.3 O PLANO TANGENTE E A RETA NORMAL À SUPERFÍCIE QUE É O GRÁFICO DE $z = f(x,y)$

Seja S a superfície correspondente ao gráfico de $z = f(x,y)$ e suponha que f_x e f_y sejam contínuas. Seja $P = (x_o,y_o,f(x_o,y_o))$, um ponto sobre esta superfície, C_1 e C_2 as curvas obtidas através das interseções de S com os planos $y = y_o$ e $x = x_o$, respectivamente. Sejam T_1 e T_2 as retas tangentes às curvas C_1 e C_2 no ponto $(x_o,y_o,f(x_o,y_o))$. (veja a Figura 4.1). Vimos na seção 4.3 que os seus coeficientes angulares são $f_x(x_o,y_o)$ e $f_y(x_o,y_o)$, respectivamente. Portanto, no plano $y = y_o$, a reta T_1 é o gráfico de

$$z = f(x_o,y_o) + f_x(x_o,y_o)(x - x_o),$$

o que no espaço é o conjunto de pontos da forma

$$(x, y_o, f(x_o,y_o) + f_x(x_o,y_o)(x - x_o)),$$

onde $x \in \mathbb{R}$. Fazendo $x = x_o$ e $x = x_o + \Delta x$, encontramos dois pontos de T_1, digamos $P = (x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ e $Q = (x_o + \Delta x, y_o, f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)\Delta x)$. A reta T_1 é paralela ao vetor

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \Delta x\ (1, 0, f_x(x_o, y_o)),$$

portanto esta reta é paralela ao vetor

$$(1, 0, f_x(x_o, y_o)) \equiv \vec{V}_1.$$

De maneira análoga, os pontos sobre T_2 são da forma

$$(x_o, y, f(x_o, y_o) + f_y(x_o, y_o)(y - y_o)),$$

onde $y \in \mathbb{R}$. Fazendo $y = y_o$ e $y = y_o + \Delta y$, temos os pontos $M = (x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ e $N = (x_o, y_o + \Delta y, f(x_o, y_o) + f_y(x_o, y_o)\Delta y)$ da reta T_2. A reta T_2 é paralela ao vetor $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \Delta y\ (0, 1, f_y(x_o, y_o))$, portanto, ela é paralela ao vetor

$$(0, 1, f_y(x_o, y_o)) \equiv \vec{V}_2.$$

Definimos o **plano tangente** à S no ponto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$, o qual denotaremos por π, como o plano que passa por $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ e contém as retas T_1 e T_2. Como as retas T_1 e T_2 são paralelas aos vetores $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$, respectivamente, então o vetor

$$\vec{N} \equiv \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (-f_x(x_o, y_o), -f_y(x_o, y_o), 1), \tag{5.3}$$

será perpendicular a T_1 e T_2 e, portanto, normal ao plano π. O vetor $\vec{N}$ acima é chamado de **vetor normal** a S em $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$. Portanto, o plano π é o conjunto dos pontos (x, y, z) que satisfazem à equação (veja Seção 1.2),

$$(x - x_o, y - y_o, z - f(x_o, y_o)) \cdot \vec{N} = 0,$$

o que é equivalente a

$$z = f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f_y(x_o, y_o)(y - y_o). \tag{5.4}$$

Definição 5.2 A **reta normal** à superfície S no ponto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ é a reta que passa por este ponto e é paralela ao vetor normal $\overrightarrow{N}$, dado pela equação (5.3); portanto,

$$x = x_o - f_x(x_o, y_o)t, \quad y = y_o - f_y(x_o, y_o)t \quad \text{e} \quad z = f(x_o, y_o) + t,$$

onde $t \in \mathbb{R}$, são equações paramétricas da mesma.

Exemplo 5.4 Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao paraboloide elíptico

$$z = 2x^2 + y^2,$$

no ponto $(1, 1, 3)$.

Solução Note que $f_x(x, y) = 4x$ e $f_y(x, y) = 2y$, em particular, $f_x(1, 1, 3) = 4$ e $f_y(1, 1, 3) = 2$, logo, a equação do plano tangente ao paraboloide no ponto $(1, 1, 3)$ é $z = 3 + 4(x - 1) + 2(y - 1)$, ou seja,

$$4x + 2y - z = 3.$$

Por outro lado,

$$x = 1 - 4t, \quad y = 1 - 2t \quad z = 3 + t,$$

t real, são equações paramétricas da reta normal.

□

Exercício 5.1 Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície que é o gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto P especificado. Por que o ponto P dado pertence à superfície? Justifique.

a) $f(x, y) = 4x^3y^2 + 2y$ e $P(1, -2, 12)$

b) $f(x, y) = 4x^2 - y^2$ e $P(5, -8, 36)$

c) $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ e $P(-1, 0, 0)$

d) $f(x, y) = \frac{2x+y}{x-2y}$ e $P(3, 1, 7)$

e) $f(x, y) = xe^{-y}$ e $P(1, 0, 1)$.

A equação (5.4) define uma função de duas variáveis

$$z = l(x, y) \equiv f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f_y(x_o, y_o)(y - y_o), \qquad (5.5)$$

cujo gráfico é o plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$.

Em particular, para pontos (x, y) da forma $(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$, teremos

$$z = l(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) = f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)\Delta x + f_y(x_o, y_o)\Delta y.$$

Portanto, desta relação e de (5.2), se f for diferenciável em (x_o, y_o), temos

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) = l(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) + \epsilon_1\, \Delta x + \epsilon_2\, \Delta y,$$

portanto, para Δx e Δy pequenos, ou seja, para (x, y) próximos de (x_o, y_o), os pontos do gráfico de $f(x, y)$ podem ser aproximados pelos correspondentes pontos do gráfico de $l(x, y)$. O erro que cometemos ao fazermos tal aproximação é dado por $\epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$.

A função $z = l(x, y)$ é chamada de **aproximação linear de** f **em** (x_o, y_o).

Da discussão acima, concluimos que o plano tangente ao gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis é o análogo da reta tangente ao gráfico de uma função diferenciável de uma variável: ambos nos permitem aproximar localmente a função por algo linear.

Exemplo 5.5 Seja $f(x, y) = e^x \cos(xy)$, encontre a aproximação linear de f no ponto $(0, 0)$.

Solução Vimos no Exemplo 5.3 que

$$f_x = e^x(\cos(xy) - y\,\text{sen}(xy)) \quad e \quad f_y = -xe^x\text{sen}(xy),$$

logo, $f_x(0, 0) = 1$ e $f_y(0, 0) = 0$, portanto, a aproximação linear de f em $(0, 0)$ é

$$l(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y = 1 + x.$$

Ou seja, para (x, y) próximos de $(0, 0)$, o valor de $f(x, y)$ é aproximadamente $1 + x$.

□

5.4 INCREMENTOS E DIFERENCIAIS

Denotaremos por dz (ou df) a variação de z ou de f, ao longo do plano tangente ao gráfico de $z = f(x,y)$ no ponto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$, quando passamos de (x_o, y_o) para $(x_o + dx, y_o + dy)$, onde dx e dy são as diferenciais de x e y, respectivamente. Ou seja,

$$dz = l(x_o + dx, y_o + dy) - f(x_o, y_o),$$

então, de (5.5), temos

$$dz = f_x(x_o, y_o)dx + f_y(x_o, y_o)dy,$$

que é chamada de **diferencial de** f **no ponto** (x_o, y_o).

Exemplo 5.6 Seja $z = f(x,y) = 5y^2 - xy + \cos(xy)$, calcule dz.

Solução Vimos que

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy,$$

por outro lado, $f_x(x,y) = -y - y\,\text{sen}(xy)$ e $f_y(x,y) = 10y - x - x\,\text{sen}(xy)$. Portanto,

$$dz = -y(1 + \text{sen}(xy))dx + (10y - x - x\,\text{sen}(xy))dy.$$

□

Exercício 5.2 Calcule dz, onde $z = f(x,y)$ é dada abaixo.

a) $f(x,y) = x^3 - x^2y + 3y^2$

b) $f(x,y) = 5x^2 + 4y - 3xy^3$

c) $f(x,y) = x^2\,\text{sen}y + 2y^{3/2}$

d) $f(x,y) = ye^{-2x} - 3x^4$

e) $f(x,y) = x^2e^{xy} + 1/y^2$

f) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2) + x\arctan y$.

Note que, em virtude de (5.2), se uma função $f(x,y)$ for diferenciável, então a sua variação Δz, quando passamos de (x,y) para $(x + dx, y + dy)$, satisfaz

$$\begin{aligned}
\Delta z &= f(x + dx, y + dy) - f(x,y) \\
&= f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy + \epsilon_1 dx + \epsilon_2 dy \\
&= dz + \epsilon_1 dx + \epsilon_2 dy,
\end{aligned}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero quando dx e dy tendem a zero. Isto nos permite aproximar o incremento Δz pela diferencial dz, pois esta é mais simples de ser calculada.

Exemplo 5.7 Seja $z = f(x,y) = 3x^2 - xy$. Calcule Δz e dz quando (x,y) varia de $(1,2)$ para $(1,01; 1,98)$.

Solução No Exemplo 5.2 vimos que

$$\Delta z = (6x - y)\Delta x - x\Delta y + 3(\Delta x)^2 - \Delta x \Delta y.$$

Fazendo $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0,01$ e $\Delta y = -0,02$, encontramos,

$$\Delta z = 0,0605.$$

Por outro lado, como $f_x = 6x - y$ e $f_y = -x$, segue-se que

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = (6x - y)dx - xdy,$$

fazendo $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0,01$ e $\Delta y = -0.02$, obtemos

$$dz = (6 - 2)(0,001) + (-1)(-0,002) = 0,060.$$

Logo, o erro que cometeríamos ao usar dz como aproximação de Δz seria de apenas $0,0005$.

□

Exemplo 5.8 O raio e a altura de um cilindro reto são 8 cm e 20 cm, respectivamente, com erro possível de $\pm 0,01$ cm. Use diferenciais para aproximar o erro máximo no cálculo do volume do cilindro.

Solução O volume do cilindro circular reto é $V(r,h) = \pi r^2 h$, onde r e h são vistos como valores medidos, com erros máximos de medida dr e dh, respectivamente. Portanto,

$$\Delta V \approx dV = V_r dr + V_h dh = 2\pi rh dr + \pi r^2 dh.$$

Fazendo $r = 8$, $h = 20$ e $dr = dh = \pm 0,01$, obtemos o seguinte erro máximo:

$$dV = 2\pi(8)(20)(0,01) + (64)(0,01)\pi = 3,84\pi \approx 12,06\, cm^3.$$

□

Exercício 5.3 A resistência total de dois resistores R_1 e R_2, ligados em paralelo, é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Se as medidas de R_1 e R_2, são 100 e 200 ohms, respectivamente, com erro máximo de $\pm 1\%$ em cada medida, encontre uma aproximação do erro máximo no valor calculado de R.

5.5 DIFERENCIABILIADADE PARA FUNÇÃO DE MAIS DE DUAS VARIÁVEIS

A seguir daremos a definição para diferenciabilidade para uma função de três variáveis. A extensão deste conceito para funções de mais de três variáveis é imediata.

Definição 5.3 (***Diferenciabilidade para função de três variáveis***) *Seja $w = f(x,y,z)$, tal que suas derivadas parciais $f_x(x_o,y_o,z_o)$, $f_y(x_o,y_o,z_o)$ e $f_z(x_o,y_o,z_o)$ existam. Dizemos que f é **diferenciável** em (x_o,y_o,z_o), se*

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) = f(x_0,y_0,z_0) + f_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y + f_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z, \quad (5.6)$$

onde ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 são funções de Δx, Δy e Δz, as quais tendem a zero quando Δx, Δy e Δz tenderem simultaneamente a zero.

Como no caso de duas variáveis, para funções de três variáveis a diferenciabilidade implica continuidade.

Mostra-se que se f_x, f_y e f_z existirem numa vizinhança de (x_o,y_o,z_o) e forem contínuas neste ponto, então $f(x,y,z)$ será diferenciável em (x_o,y_o,z_o). Este resultado é o análogo ao Teorema 5.1. Deste resultado, segue-se que se as derivadas f_x, f_y e f_z forem contínuas numa vizinhança de um ponto, então f tem que ser contínua na mesma, visto que diferenciabilidade implica continuidade.

De (5.6), se uma função $f(x,y,z)$ for diferenciável num ponto (x_o,y_o,z_o), então os seus valores nas proximidades deste ponto, ou seja, em pontos da forma

$$(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y, z_o+\Delta z),$$

onde Δx, Δy e Δz são pequenos, podem ser aproximados por

$$f(x_o,y_o,z_o) + f_x(x_o,y_o,z_o)\Delta x + f_y(x_o,y_o,z_o)\Delta y + f_z(x_o,y_o,z_o)\Delta z,$$

que é chamada de **aproximação linear** de f, no ponto (x_o,y_o,z_o).

A diferencial de f no ponto (x,y,z) é definida como

$$df(x,y,z) = f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz,$$

e nos permite encontrar valores aproximados para as variações de f, ou seja,

$$\Delta f \approx df.$$

Exercício 5.4 A resistência total de três resistores R_1, R_2 e R_3, ligados em paralelo, é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Se as medidas de R_1, R_2 e R_3 são 100, 200 e 300 ohms, respectivamente, com erro máximo de $\pm 1\%$ em cada medida, encontre uma aproximação do erro máximo no valor calculado de R.

Exercício 5.5 Calcule as diferenciais das seguintes funções.

a) $f(x,y,z) = x^3yz - 3yz^2$

b) $f(x,y,z) = \cos(x^2+y+z)$

c) $f(x,y,z) = \frac{x+y^2}{1-z}$

d) $f(x,y,z) = (x+y+z)^3$.

AULA 6

A Regra da Cadeia e a derivada direcional

OBJETIVOS

No final desta aula, o aluno deverá ser capaz de:

1. Calcular derivadas de funções compostas, a partir a Regra da Cadeia.
2. Calcular o gradiente de uma função, saber qual é o seu significado geométrico e como ele está relacionado com as curvas de nível de uma função de duas variáveis.
3. Compreender a definição de derivada direcional, bem como calculá-la.
4. Calcular derivadas parciais implicitamente.
5. Encontrar a equação do plano tangente à superfície dada por $f(x,y,z) = 0$.

6.1 A REGRA DA CADEIA

6.1.1 Revisão da Regra da Cadeia para funções de uma variável

Antes de vermos a Regra da Cadeia para o caso de funções de duas variáveis, vamos recordá-la para o caso de uma função de apenas uma variável. Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$, funções diferenciáveis, então, a composta de f com g é a função na variável t, dada por $y = f(g(t))$. Veremos como calcular a derivada desta função em relação a t.

Seja t fixado. Quando passamos de t para $t + \Delta t$, a variável x sofre uma variação de

$$\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t),$$

enquanto que y varia de

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) = f(g(t + \Delta t)) - f(g(t)) = f(g(t) + \Delta x) - f(g(t)),$$

como f é diferenciável, de (5.1), temos

$$f(g(t) + \Delta x) = f(g(t)) + f'(g(t))\Delta x + \epsilon(\Delta x),$$

portanto, temos

$$\Delta y = f'(g(t))\ \Delta x + \epsilon\ \Delta x, \tag{6.1}$$

onde ϵ tende a zero quando Δx tende a zero. Como $g(t)$ é contínua, pois é diferenciável, quando Δt tende a zero, Δx também tende a zero, portanto,

ϵ tende a zero quando Δt tende a zero. Além disso, como g é diferenciável, então,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} = g'(t). \tag{6.2}$$

Dividindo a equação (6.1) por Δt, tomando o limite quando Δt tende a zero e usando (6.2), temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(f'(g(t)) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = f'(g(t))\, g'(t) + g'(t) \cdot 0 \\ &= f'(g(t))\, g'(t), \end{aligned} \tag{6.3}$$

que é chamada de **Regra da Cadeia**.

Em (6.3), $f'(g(t))$ é obtida tomando-se a derivada de $f(x)$ em relação a x, a qual é uma função de x, substituindo-se na mesma o x por $g(t)$. É comum reescrevermos a equação (6.3) da seguinte forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt},$$

onde fica implícito que $\frac{dy}{dx}$ é obtida derivando-se f em relação a x e na expressão resultante, a qual é uma função de x, substituimos x por $g(t)$.

Exemplo 6.1 Seja $y = e^x$, onde $x = t^2 + t$. Calcule $\frac{dy}{dt}$.

Solução Da Regra da Cadeia, temos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt} = (e^x)(2t+1) = e^{t^2+1}(2t+1).$$

Portanto, temos $\frac{d}{dt}\, e^{t^2+t} = (2t+1)e^{t^2+t}$.

□

Nas aplicações em que temos que derivar uma função complicada de t, procuramos vê-la como uma composta de duas (ou mais) funções e usamos a Regra da Cadeia para calcularmos a derivada da função composta.

6.1.2 A Regra da Cadeia para funções de duas variáveis

6.1.3 O caso em que $z = f(x,y)$, com $x = g(t)$ e $y = h(t)$

A seguir veremos como calcular a derivada em relação a t da composta $z = f(x,y)$, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$, assumindo que f, g e h sejam funções diferenciáveis.

Seja $z(t) = f(g(t), h(t))$ e fixemos o valor de t. Quando passamos de t para $t + \Delta t$, as variáveis x e y sofrem as seguintes variações:

$$\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t)$$

e

$$\Delta y = h(t + \Delta t) - h(t),$$

respectivamente. Por outro lado, a variável z sofre uma variação de

$$\begin{aligned} \Delta z = z(t+\Delta t) - z(t) &= f(g(t+\Delta t), h(t+\Delta t)) - f(g(t), h(t)) \\ &= f(g(t) + \Delta x, h(t) + \Delta y) - f(g(t), h(t)). \end{aligned}$$

Como f é diferenciável, da relação acima e de (5.2), temos

$$\Delta z = f_x(g(t),h(t))\ \Delta x + f_y(g(t),h(t))\ \Delta y + \epsilon_1\ \Delta x + \epsilon_2\ \Delta y, \quad (6.4)$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero quando ambos Δx e Δy tendem a zero. Como g e h são diferenciáveis, elas são contínuas, portanto, Δx e Δy tendem a zero quando Δt tende a zero, portanto, ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero quando Δt tende a zero. Além disso, como g e h são diferenciáveis, então,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = g'(t) \quad e \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = h'(t). \quad (6.5)$$

Portanto, dividindo (6.4) por Δt, tomando o limite quanto Δt tende a zero, usando (6.5) e lembrando que ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero quando Δt tende a zero, temos

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(f_x(g(t),h(t)) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(g(t),h(t)) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \\
&= f_x(g(t),h(t))\ g'(t) + f_y(g(t),h(t))\ h'(t) + g'(t) \cdot 0 + h'(t) \cdot 0 \\
&= f_x(g(t),h(t))\ g'(t) + f_y(g(t),h(t))\ h'(t),
\end{aligned}$$

onde $f_x(g(t),h(t))$ acima é obtida tomando-se a derivada parcial de $f(x,y)$ em relação a x, a qual é uma função das variáveis x e y e substituimos estas por $g(t)$ e $h(t)$, respectivamente. De maneira análoga, $f_y(g(t),h(t))$ é obtida tomando-se a derivada parcial de $f(x,y)$ em relação a y, a qual é uma função das variáveis x e y e substituimos estas por $g(t)$ e $h(t)$, respectivamente. Com isso provamos o teorema a seguir.

Teorema 6.1 *Seja $z = f(x,y)$, com $x = g(t)$ e $y = h(t)$, onde f, g e h são funções diferenciáveis. Então, temos*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

No teorema acima, $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ são obtidos derivando-se $f(x,y)$ parcialmente em relação a x e a y, respectivamente. Nas funções obtidas, substituimos x e y por $g(t)$ e $h(t)$, respectivamente.

Exemplo 6.2 Seja $z = x^2 + xy$, com $x = 3t^2 + 1$ e $y = 2t - t^2$. Calcule $\frac{dz}{dt}$.

Solução Do Teorema 6.1, temos

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= (2x + y)(6t) + (x)(2 - 2t) \\
&= \left(2(3t^2 + 1) + (2t - t^2)\right)(6t) + (3t^2 + 1)(2 - 2t) \\
&= (6t^2 + 2 + 2t - t^2)(6t) + (3t^2 + 1)(2 - 2t) \\
&= 2 + 10t + 18t^2 + 24t^3.
\end{aligned}$$

□

Observe que poderíamos substituir x e y pelas funções acima obtendo

$$z = (3t^2 + 1)^2 + (3t^2 + 1)(2t - t^2),$$

que é uma função em t. Utilizando a Regra da Cadeia para funções de uma variável, teríamos

$$\frac{dz}{dt} = 2(3t^2+1).(6t) + (6t)(2t-t^2) + (3t^2+1)(2-2t) = 2+10t+18t^2+24t^3.$$

No entanto, nem sempre tal procedimento é possível ou desejável, razão pela qual necessitamos do resultado estabelecido no Teorema 6.1.

Exemplo 6.3 Um circuito elétrico consiste de um resistor R e de uma força eletromotriz V. Num dado instante, $V = 80$ volts e aumenta a uma taxa de 5 volts/min, enquanto que $R = 40$ ohms e decresce a uma taxa de 2 ohms/min. Da Lei de Ohm, sabe-se que a corrente é dada por $I = V/R$. Calcule $\frac{dI}{dt}$.

Solução Neste caso, $I = V/R$, onde $I = I(t)$ e $R = R(t)$. Da Regra da Cadeia dada no Teorema 6.1, temos

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \frac{\partial I}{\partial V}\frac{dV}{dt} + \frac{\partial I}{\partial R}\frac{dR}{dt} \\
&= (1/R)\frac{dV}{dt} + (-V/R^2)\frac{dR}{dt} \\
&= (1/40)(5) + (-80/1600)(-2) = 9/40 = 0,225(amp/min).
\end{aligned}$$

□

Exercício 6.1 Calcule $\frac{dz}{dt}$, onde $z = f(x,y)$, com $x = g(t)$ e $y = h(t)$.

a) $z = x\ln(x+2y)$, $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \cos t$

b) $z = x^2 - y^2$, $x = \frac{1}{t+1}$ e $y = \frac{t}{t+1}$

c) $z = ye^{x+y}$, $x = t$ e $y = \cos t$

d) $z = x^2y + xy^2$, $x = 1-t^2$ e $y = 2+t^2$

(e) $z = xy + x^2$, $x = e^t\cos t$ e $y = e^{-t}$.

Podemos calcular derivadas de ordem superior de $z = f(x,y)$, onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Por exemplo

$$\begin{aligned}
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}. \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

Aplicamos o Teorema 6.1 no cálculos das derivadas $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ e $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, isto é, olhamos para $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ como funções de x e y, onde estas são funções de t. Ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{dy}{dt} \qquad (6.7)$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}\frac{dy}{dt}. \qquad (6.8)$$

Portanto, de (6.6), (6.7) e (6.8), temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\ &+ \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}. \end{aligned}$$

O análogo do Teorema 6.1 para uma função de três variáveis é dado abaixo.

Teorema 6.2 Seja $w = f(x,y,z)$ uma função diferenciável de x, y e z, onde $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então, a composta $w = f(x(t), y(t), z(t))$ é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Definição 6.1 Dada uma função $f(x,y)$, cujas as derivadas parciais f_x e f_y existam, definimos o **gradiente de** f **no ponto** (x,y), o qual denotamos por $\nabla f(x,y)$, como

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,\vec{\imath} + f_y(x,y)\,\vec{\jmath}.$$

Exemplo 6.4 Seja $f(x,y) = xy^2$, então

$$\nabla f(x,y) = y^2\,\vec{\imath} + 2xy\,\vec{\jmath}.$$

O conceito de gradiente se generaliza de maneira natural para funções de mais de duas variáveis. Em particular, para uma função $f(x,y,z)$, onde as derivadas parciais f_x, f_y e f_z existam, define-se o seu gradiente no ponto (x,y,z) como

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\,\vec{\imath} + f_y(x,y,z)\,\vec{\jmath} + f_z(x,y,z)\,\vec{k}.$$

Exemplo 6.5 Seja $f(x,y,z) = x^2yz$, então,

$$\nabla f(x,y,z) = 2xyz\,\vec{\imath} + x^2z\,\vec{\jmath} + x^2y\,\vec{k}.$$

A interpretação geométrica do gradiente será dada na Seção 6.5.

A seguir, dada uma função $f(x,y)$, vamos calcular os seus valores ao longo do segmento de reta ligando (x,y) a (x_o, y_o).

Exemplo 6.6 Seja f diferenciável numa vizinhança de (x_o, y_o), então para (x,y) fixo, defina

$$w(t) = f(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y),$$

onde $0 \leq t \leq 1$. Mostre que

$$\begin{aligned} w'(t) &= (x_o - x)f_x(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y) \\ &+ (y_o - y)f_y(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Em particular,

$$w'(1) = \nabla f(x_o, y_o) \cdot (x - x_o, y - y_o). \tag{6.10}$$

Solução Sejam $g(t) = tx_o + (1-t)x$ e $h(t) = ty_o + (1-t)y$, então podemos ver $w(t)$ como a seguinte composta: $w(t) = f(x,y)$, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$. Portanto, da Regra da Cadeia, Teorema 6.1, temos,

$$\begin{aligned} w'(t) &= f_x(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y)(x - x_o) + f_y(tx_o + (1-t)x, ty_o \\ &+ (1-t)y)(y_o - y), \end{aligned}$$

□

com isso terminamos o exemplo.

6.1.4 O caso em que $z=f(u,v)$, onde $u=g(x,y)$ e $v=h(x,y)$

A seguir veremos como calcular as derivadas parciais com relação a x e y da função $z = f(u,v)$, com $u = g(x,y)$ e $v = h(x,y)$, onde assumiremos que f, g e h são funções diferenciáveis. Ou seja, calcularemos $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, onde $z(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$.

Seja (x,y) fixado. Quando passamos de x para $x + \Delta x$ e mantemos y fixo, as variáveis u e v sofrem as seguintes variações:

$$\Delta u = g(x + \Delta x, y) - g(x,y)$$

e

$$\Delta v = h(x + \Delta x, y) - h(x,y).$$

Por outro lado, a variável z sofre a variação

$$\begin{aligned} z(x+\Delta x, y) - z(x,y) &= f(g(x+\Delta x, y), h(x+\Delta x, y)) - f(g(x,y), h(x,y)) \\ &= f(g(x,y) + \Delta u, h(x,y) + \Delta v) - f(g(x,y), h(x,y)). \end{aligned}$$

Como f é diferenciável, da relação acima e de (5.2), temos

$$\begin{aligned} z(x+\Delta x, y) - z(x,y) &= f_u(g(x,y), h(x,y))\ \Delta u + f_v(g(x,y), h(x,y))\ \Delta v \\ &\quad +\epsilon_1\ \Delta u + \epsilon_2\ \Delta v \end{aligned} \tag{6.11}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são funções de Δu e Δv, as quais tendem a zero quando ambos Δu e Δv tendem a zero. Como g e h são contínuas, pois são diferenciáveis, segue-se que Δu e Δv tendem a zero quando Δx tende a zero. Portanto, ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero quando Δx tende a zero. Além disso, sendo g e h diferenciáveis, as suas derivadas parciais em relação a x existem. Logo,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x, y) - g(x,y)}{\Delta x} = g_x(x,y) \tag{6.12}$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x, y) - h(x,y)}{\Delta x} = h_x(x,y). \tag{6.13}$$

Portanto, dividindo a equação (6.11) por Δx, tomando-se o limite quando Δx tende a zero e usando (6.12) e (6.13), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(f_u(g(x,y), h(x,y))\ \frac{\Delta u}{\Delta x} + f_v(g(x,y), h(x,y))\ \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\ \epsilon_1 + \frac{\Delta v}{\Delta x}\ \epsilon_2 \right) \\ &= f_u(u(x,y), v(x,y))\ g_x(x,y) + f_v(g(x,y), h(x,y))\ h_x(x,y) \\ &\quad +g_x(x,y) \cdot 0 + h_x(x,y) \cdot 0 \\ &= f_u(u(x,y), v(x,y))\ g_x(x,y) + f_v(g(x,y), h(x,y))\ h_x(x,y). \end{aligned}$$

De maneira análoga, considerando a variação de z quando passamos de (x, y) para $(x, y + \Delta y)$ e tendo em vista que as funções como f, g e h são diferenciáveis, mostra-se que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y + \Delta y) - z(x, y)}{\Delta y} \\ &= f_u(u(x, y), v(x, y))\ g_y + f_v(g(x, y), h(x, y))\ h_y.\end{aligned}$$

Com isso provamos o teorema abaixo.

Teorema 6.3 Seja $z = f(u, v)$, com $u = g(x, y)$ e $v = h(x, y)$. Se f, g e h forem diferenciáveis, então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

No teorema acima, fica implícito que $\frac{\partial z}{\partial u}$ é obtida tomando-se a derivada parcial de $f(u, v)$ em relação a u, a qual é uma função das variáveis u e v, na qual substituimos u e v pelas funções, $g(x, y)$ e $h(x, y)$, respectivamente. De maneira análoga, fica implícito que $\frac{\partial z}{\partial v}$ é obtida tomando-se a derivada parcial de $f(u, v)$ em relação a v, a qual é uma função das variáveis u e v, na qual substituimos u e v pelas funções $g(x, y)$ e $h(x, y)$, respectivamente.

Exemplo 6.7 Seja $z = u + v^2 \cos u$, $u = x^2 + y^2$ e $v = x - y$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solução

Do Teorema 6.3, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \left(1 - v^2 \operatorname{sen} u\right)(2x) + (2v \cos u)(1) \\ &= 2x\left(1 - (x - y)^2 \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\right) + 2(x - y)\cos(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \left(1 - v^2 \operatorname{sen} u\right)(2y) + (2v \cos u)(-1) \\ &= 2y\left(1 - (x - y)^2 \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\right) - 2(x - y)\cos(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

□

Exercício 6.2 Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, onde $z = f(u, v)$, com $u = g(x, y)$ e $v = h(x, y)$, são dadas abaixo.

a) $z = u^2 + uv + v^2$, $u = x + y$ e $v = x - y$

b) $z = u/v$, $u = xe^y$ e $v = 1 + xe^{-y}$

c) $z = u \cos v$, $u = x + y$ e $v = xy$

d) $z = uv + v^2$, $u = x \cos y$ e $v = y \cos x$.

Podemos calcular derivadas de ordens superiores de $z = f(u,v)$, onde $u = g(x,y)$ e $v = h(x,y)$. Por exemplo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Aplicamos o Teorema 6.3 no cálculos das derivadas $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ e $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$, isto é, olhamos para $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ como funções de u e v, onde estas são funções de x e de y. Ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

De maneira análoga, calculamos as derivadas $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ e $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$.

Exercício 6.3 Seja $z = f(x,y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$. Mostre que

$$z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r^2}\, z_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\, z_r.$$

Teorema 6.4 *Seja $z = f(u)$, onde $u = g(x,y)$, com f e g diferenciáveis. Então,*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Note que o teorema acima pode ser visto como um caso particular do Teorema 6.3 quando $v = 0$.

Exercício 6.4 Mostre que se $u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$, onde f e g têm derivadas de segunda ordem, então u satisfaz a **equação de onda**

$$u_{tt} = a^2\, u_{xx},$$

onde a é uma constante.

Exercício 6.5 Se $z = \cos(x+y) + \cos(x-y)$, mostre que

$$z_{xx} - z_{yy} = 0.$$

Definição 6.2 Dizemos que uma função f de duas variáveis é **homogênea de grau** n se $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$, para todo t, tal que (tx,ty) esteja no domínio de f. Por exemplo,

$$f(x,y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$$

é homogênea de grau 3.

Exercício 6.6 Dada uma função $f(x,y)$ homogênea de ordem n, mostre que

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = nf(x,y).$$

Sugestão: Diferencie a equação $f(tx_o,ty_o) = t^n f(x_o,y_o)$ em relação a t, depois faça $t = 1$.

O próximo teorema é uma generalização do Teorema 6.3 para uma função f de três variáveis.

Teorema 6.5 *Seja $w = F(u,v,z)$, com $u = g(x,y)$, $v = h(x,y)$ e $z = f(x,y)$. Se F, g, h e f forem diferenciáveis, então*

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Exemplo 6.8 Seja $w = F(x,y,z)$, onde $z = f(x,y)$, com F e f diferenciáveis. Mostre que

$$w_x(x,y) = F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))\, z_x(x,y) \qquad (6.14)$$

e

$$w_y(x,y) = F_y(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))\, z_y(x,y). \qquad (6.15)$$

Solução Seja (x,y) fixado, seja $\Delta z = f(x+\Delta x,y) - f(x,y)$, então, como F é diferenciável, temos

$$\begin{aligned} w(x+\Delta x,y) - w(x,y) &= F(x+\Delta x,y,f(x,y)+\Delta z) - F(x,y,f(x,y)) \\ &= F_x(x,y,f(x,y))\Delta x + F_z(x,y,f(x,y))\Delta z \\ &\quad +\epsilon_1\, \Delta x + \epsilon_2\, 0 + \epsilon_3\, \Delta z. \end{aligned}$$

Como f é contínua, ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 tendem a zero quando Δx. Logo,

$$\begin{aligned} w_x(x,y) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{w(x+\Delta x,y) - w(x,y)}{\Delta x} \\ &= F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))\, z_x, \end{aligned}$$

o que mostra (6.14). De maneira análoga, mostra-se (6.15).

□

6.2 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Consideremos a superfície esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Podemos estar interessados, por exemplo, em calcular a equação do plano tangente a esta superfície num ponto (x_o, y_o, z_o) da mesma. A equação acima define implicitamente z como duas funções de (x, y), ou seja,

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad e \quad z = g(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

A partir destas equações e da equação (5.4), encontramos a equação do plano tangente num ponto qualquer da superfície, desde que $x_o^2 + y_o^2 \neq 1$ (nos pontos onde $x_o^2 + y_o^2 = 1$, o plano tangente é "vertical", ou seja, paralelo ao eixo dos z).

Muitas superfícies são dadas por equações da forma $F(x, y, z) = 0$ e nem sempre é possível expressarmos explicitamente uma das variáveis em função das outras duas, como no exemplo acima. Entretanto, se soubermos que tal equação define implicitamente, digamos z em função de (x, y), será possível calcularmos z_x e z_y, sem termos que explicitar z em função das variáveis (x, y). É isto que faremos a seguir e tal procedimento é chamado de derivação implícita.

Consideremos uma equação da forma

$$F(x, y, z) = 0, \tag{6.16}$$

onde as derivadas parciais de primeira ordem de $F(x, y, z)$ são contínuas numa vizinhança de (x_o, y_o, z_o). Se

$$F(x_o, y_o, z_o) = 0$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) \neq 0,$$

então o **Teorema da Função Implícita** nos afirma que a equação (6.16) nos define a variável z com função de x e y, numa vizinhança do ponto (x_o, y_o), mais precisamente, existe uma função $z = f(x, y)$, diferenciável com derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa vizinhança V do ponto (x_o, y_o), tal que

$$f(x_o, y_o) = z_o, \quad F(x, y, f(x, y)) = 0, \text{ para todo } (x, y) \in V.$$

A seguir veremos como calcular as derivadas parciais da função $z = f(x, y)$.

Como

$$w(x, y) = F(x, y, f(x, y)) = 0,$$

para todo $(x, y) \in V$, segue que $w_x(x, y) = 0 = w_y(x, y)$ em V, logo, de (6.14) e (6.15), temos

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x} = F_x + F_z\, z_x$$

e

$$0 = \frac{\partial w}{\partial y} = F_y + F_z\, z_y.$$

Portanto,

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}. \tag{6.17}$$

Exemplo 6.9 *Calcule z_x e z_y, onde $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.*

Solução Seja $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$, então $F_x = 3x^2 + 6yz$, $F_y = 3y^2 + 6xz$ e $F_z = 3z^2 + 6xy$, portanto, de (6.17) concluimos que

$$z_x = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}, \quad z_y = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}.$$

Na prática, não precisamos guardar as fórmulas dadas em (6.17), por exemplo, dada uma equação tipo

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1,$$

se assumirmos que ela define $z = f(x,y)$, o que fazemos para calcular z_x é derivarmos a equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6x\,y\,z = 1$$

parcialmente em relação a x, lembrando que z é função de x e y, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + y^3 + z^3 + 6x\,y\,z\right) = \frac{\partial 1}{\partial x},$$

o que nos dá

$$3x^2 + 3z^2\; z_x + 6\,y\,z + 6x\,y\,z_x = 0\,,$$

da qual encontramos $z_x = -\frac{x^2+2\,y\,z}{z^2+2xy}$. De maneira análoga, podemos encontrar z_y.

□

Exercício 6.7 Calcule z_x e z_y, se $z = f(x,y)$ é definida implicitamente pelas equações abaixo.

a) $2xz^3 - 3yz^2 + x^2y^2 + 4z = 0$

b) $xz^2 + 2x^2y - 4y^2z + 3y - 2 = 0$

c) $xe^{yz} - 2ye^{xz} + 3ze^{xy} = 1$

d) $yx^2 + z^2 + \cos(xyz) = 4$

e) $x^x + y^2 + z^2 = 3xyz$

f) $yz = \ln(x+z)$.

6.3 PLANO TANGENTE À SUPERFÍCIE $F(x,y,z) = 0$

Seja S a superfície dada pela equação $F(x,y,z) = 0$, onde F é diferenciável. Vamos encontrar a equação do plano tangente a S no ponto (x_o, y_o, z_o), onde

$$F_z(x_o, y_o, z_o) \neq 0.$$

De acordo com o Teorema da Função Implícita, a equação $F(x,y,z) = 0$ define implicitamente $z = f(x,y)$ numa vizinhança de (x_o, y_o). De (5.4) a equação deste plano é dada por

$$z = zo + f_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f_y(x_o, y_o)(y - y_o),$$

por outro lado, de (6.17)

$$f_x(x_o, y_o) = -\frac{F_x(x_o, y_o, z_o)}{F_z(x_o, y_o, z_o)} \quad e \quad f_y(x_o, y_o) = -\frac{F_y(x_o, y_o, z_o)}{F_z(x_o, y_o, z_o)},$$

portanto, a equação do plano tangente a S no ponto (x_o, y_o, z_o) é

$$F_x(x_o, y_o, z_o)(x - x_o) + F_y(x_o, y_o, z_o)(y - y_o) + F_z(x_o, y_o, z_o)(z - z_o) = 0 \tag{6.18}$$

Portanto, o vetor $\nabla F(x_o, y_o, z_o)$ é **normal à superfície** S **no ponto** (x_o, y_o, z_o).

Exemplo 6.10 Encontre a equação do plano tangente à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, no ponto $(0, 0, 1)$.

Solução Neste caso, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Note que $F(1, 0, 0) = 0$, e como $F_z = 2z$, segue-se que $F_z(0, 0, 1) = 2 \neq 0$, portanto, do Teorema da Função Implícita, a equação $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente $z = f(x, y)$, para (x, y) numa vinhança de $(0, 0)$. Temos $F_x(0, 0, 1) = 0$ e $F_y(0, 0, 1) = 0$. Disso e de (6.18), concluimos que a equação do plano tangente no ponto dado é

$$z = 1.$$

□

Nos cálculos acima assumimos que $F_z(x_o, y_o, z_o) \neq 0$, se isto não acontecer, podemos verificar se $F_x(x_o, y_o, z_o) \neq 0$ ou $F_y(x_o, y_o, z_o) \neq 0$. No primeiro caso, o Teorema da Função Implícita nos dirá que $F(x, y, z) = 0$ nos define implicitamente $x = g(y, z)$ numa vizinhança de (y_o, z_o) e no segundo caso ele nos dirá que $F(x, y, z) = 0$ nos define implicitamente $y = h(x, z)$ numa vizinhança de (x_o, z_o) e podemos proceder como acima e encontrarmos a equação do planto tangente à superfície no ponto (x_o, y_o, z_o), dada por (6.18).

Exercício 6.8 Determine as equações dos planos tangentes às superfícies abaixo, no ponto especificado.

a) $xyz - 4xz^3 + y^3 = 10$, $P(-1, 2, 1)$

b) $9x^2 - 4y^2 - 25z^2 = 40$, $P(4, 1, -2)$.

6.4 A DERIVADA DIRECIONAL

A seguir daremos a definição de derivada direcional para uma função de duas variáveis. A generalização deste conceito para funções de mais de duas variáveis é imediata.

Imagine que $z = f(x, y)$ represente a temperatura numa chapa de metal plana no ponto (x, y). Então as derivadas parciais $f_x(x_o, y_o)$ e $f_y(x_o, y_o)$ representam as taxas de variações da temperatura no ponto (x_o, y_o) em relação às direções horizontal e vertical, respectivamente. A seguir vamos definir a taxa de variação de $f(x, y)$ num ponto (x_o, y_o) na direção de um vetor unitário qualquer $\vec{n} = (n_1, n_2)$.

A reta l que passa por $P(x_o, y_o)$ e tem a direção de $\vec{n}$ é dada pelos pontos (x, y) da forma

$$(x, y) = (x_o, y_o) + t(n_1, n_2) = (x_o + n_1 t, y_o + n_2\, t),$$

onde o parâmetro t é real.

A variação de f quando passamos de $P(x_o, y_o)$ para $Q(x_o + n_1 t, y_o + n_2\, t)$ é

$$\Delta z = f(x_o + n_1 t, y_o + n_2\, t) - f(x_o, y_o)$$

e como $\overrightarrow{n}$ tem norma 1, comprimento de $\overrightarrow{PQ}$ é

$$||\overrightarrow{PQ}|| = ||t\vec{n}|| = |t|\ ||\vec{n}|| = |t|.$$

Logo, a taxa de variação média de $f(x, y)$ quando passamos de P a Q é

$$\frac{\Delta z}{t} = \frac{f(x_o + n_1 t, y_o + n_2\, t) - f(x_o, y_o)}{t}.$$

Note que, à medida que variamos t, o ponto Q se move ao longo da reta l. Valores positivos de t significa que $\overrightarrow{PQ}$ tem a mesma direção e sentido de $\vec{n}$, enquanto que valores negativos de t significa que $\overrightarrow{PQ}$ tem a mesma direção, porém sentido oposto ao de $\overrightarrow{n}$.

Definição 6.3 A **derivada direcional de** $f(x, y)$ **no ponto** $P(x_o, y_o)$ **na direção de** $\vec{n}$ é dada pelo limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + n_1 t, y_o + n_2\, t) - f(x_o, y_o)}{t},$$

caso ele exista, e neste caso é denotada por $D_{\vec{n}} f(x_o, y_o)$. Ela também é chamada de **taxa de variação de** f **no ponto** (x_o, y_o)**, na direção de** $\vec{n}$.

Seja

$$w(t) = f(x_o + n_1\, t, y_o + n_2\, t),$$

então,

$$\begin{aligned} D_{\vec{n}} f(x_o, y_o) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + n_1 t, y_o + n_2\, t) - f(x_o, y_o)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{w(t) - w(0)}{t} = w'(0). \end{aligned} \tag{6.19}$$

No Exemplo 6.6, vimos que

$$w'(0) = f_x(x_o, y_o)\, n_1 + f_y(x_o, y_o)\, n_2 = \nabla f(x_o, y_o) \cdot \vec{n}. \tag{6.20}$$

De (6.19) e (6.20), concluimos que

$$D_{\vec{n}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{n}.$$

Note que as derivadas parciais f_x e f_y são casos particulares de derivadas direcionais quando $\vec{n} = \vec{\imath}$ e $\vec{n} = \vec{\jmath}$, respectivamente.

Exemplo 6.11 Determine a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 y^2 - 4x$, no ponto $(1, -1)$, na direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$.

Solução Note que $||\vec{v}|| = \sqrt{20}$, logo, $\vec{v}$ não é unitário. O unitário na direção e sentido de $\vec{v}$ é

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{\imath} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{\jmath}.$$

Por outro lado,

$$\nabla f(x,y) = (2xy^2 - 4)\,\vec{\imath} + 2x^2y\,\vec{\jmath}.$$

Logo,

$$D_{\vec{n}}f(1,-1) = \nabla f(1,-1) \cdot \vec{n} = (-2,-2) \cdot (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = -\frac{6}{\sqrt{5}}\ .$$

□

Exercício 6.9 Determine a taxa de variação de f em P na direção de $\vec{v}$.

a) $f(x,y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $P(3,4)$ e $\vec{v} = (4,-3)$

b) $f(x,y) = x^2 - 5xy + 3y^2$, $P(3,-1)$ e $\vec{v} = (1,1)$

c) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $P(2,1)$ e $\vec{v} = (-1,1)$

d) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$, $P(2,-1,)$ e $\vec{v} = (4,3)$

e) $f(x,y) = xe^{3xy}$, $P(4,0)$ e $\vec{v} = (-1,3)$

f) $f(x,y) = \text{arctg}\,(y/x)$, $P(4,-4)$ e $\vec{v} = (2,-3)$.

6.5 A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO GRADIENTE DE UMA FUNÇÃO

Da definição de produto escalar, temos

$$\nabla f(x,y) \cdot \vec{n} = ||\nabla f(x,y)||\ ||\vec{n}|| \cos\theta = ||\nabla f(x,y)||\ \cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre $\nabla f(x,y)$ e $\vec{n}$. Como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, temos o seguinte resultado.

Teorema 6.6 *Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável. Então,*

(i) o valor máximo da derivada direcional $D_{\vec{n}}f(x,y)$ é $||\nabla f(x,y)||$ e ocorre quando $\vec{n}$ tem a mesma direção e sentido do vetor gradiente $\nabla f(x,y)$.

(ii) o valor mínimo da derivada direcional $D_{\vec{n}}f(x,y)$ é $-||\nabla f(x,y)||$ e ocorre quando $\vec{n}$ tem a mesma direção, porém sentido contrário ao do vetor gradiente $\nabla f(x,y)$.

Exemplo 6.12 Seja $f(x,y) = x^3e^{x-2y}$, $P(1,0)$ e $Q(0,1)$.

(a) Encontre a derivada direcional de f no ponto $P(1,0)$, na direção de P para Q.

(b) Ache o vetor unitário na direção e sentido em que f cresce mais rapidamente no ponto P e determine a taxa de variação de f naquela direção.

(c) Ache o vetor unitário na direção e sentido em que f decresce mais rapidamente no ponto P e determine a taxa de variação de f naquela direção.

Solução
a) Note que

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\vec{\imath} + f_y(x,y)\vec{\jmath} = (3x^2 + x^3)e^{x-2y}\ \vec{\imath} - 2x^3e^{x-2y}\ \vec{\jmath},$$

logo, $\nabla f(1,0) = (4e, -2e)$. O vetor $\overrightarrow{PQ} = (1,-1)$, o seu unitário é

$$\vec{n} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}).$$

Portanto,

$$D_{\vec{n}} f(1,0) = (4e, -2e) \cdot (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}\,e.$$

b) A derivada direcional cresce mais na direção de sentido de $\nabla f(1,0)$, ou seja, quando

$$\vec{n} = \frac{\nabla f(1,0)}{||\nabla f(1,0)||} = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$$

e a taxa de variação de f nesta direção é $||\nabla f(1,0)|| = \sqrt{29}\,e$.
c) A derivada direcional decresce mais na direção de sentido $-\nabla f(1,0)$, ou seja, quando

$$\vec{n} = -\frac{\nabla f(1,0)}{||\nabla f(1,0)||} = -(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$$

a taxa de variação de f nesta direção é $-||\nabla f(1,0)|| = -\sqrt{29}\,e$.

□

6.6 O GRADIENTE E CURVAS DE NÍVEL

Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável e C uma curva de nível de f. Se $P(x_o, y_o)$ for um ponto de C, então mostraremos que $\nabla f(x_o, y_o)$ será perpendicular a C no ponto $P(x_o, y_o)$ (ou seja, o vetor $\nabla f(x_o, y_o)$ será perpendicular à reta tangente a C no ponto (x_o, y_o)), (veja a Figura 6.1). Para mostrarmos este resultado, precisamos definir a reta tangente a uma curva, para tal, introduziremos o conceito de **parametrização de uma curva** C.
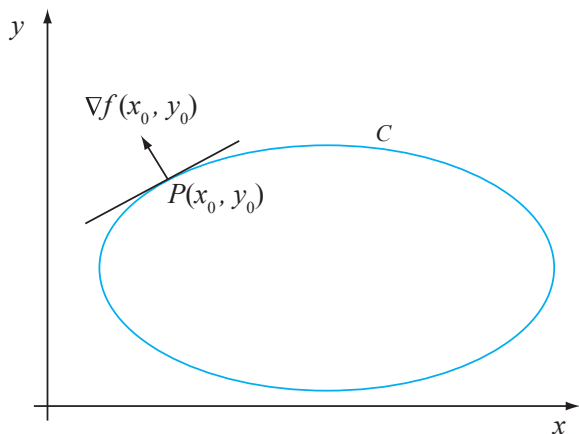
Figura 6.1: Se C é curva de nível de $f(x,y)$ que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular a C no ponto $P(x_0, y_0)$.

Definição 6.4 (Equações paramétricas de uma curva) Dada uma curva C no plano, dizemos que as equações

$$x = x(t) \quad e \quad y = y(t),$$

com $t \in I = [a, b]$, são equações paramétricas de C (ou que elas nos dão uma parametrização para C) se, à medida que t varia de a a b, a ponta do vetor

$$\overrightarrow{r}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath}$$

descreve o conjunto dos pontos de C.

Podemos ver C como uma trajetória descrita por uma partícula que se move no plano e $\overrightarrow{r}(t)$ o seu vetor posição, no instante t.

Alguns exemplos de parametrizações:

1. Dado um vetor $\overrightarrow{V} = (a, b) \neq (0, 0)$ e um ponto (x_o, y_o), as equações

$$x = x_o + at \quad e \quad y = y_o + bt,$$

$t \in \mathbb{R}$, representam uma parametrização da reta que passa por (x_o, y_o) e é paralela ao vetor $\overrightarrow{V}$.

2. Se C for o gráfico de uma função diferenciável, $y = f(x)$, onde $a \leq x \leq b$, então uma possível parametrização de C é a seguinte:

$$x = t \quad e \quad y = f(t),$$

onde $a \leq t \leq b$.

3. Seja C for o círculo de raio a, centrado na origem. Dado um ponto $P(x, y)$ de C, seja t é o ângulo entre o semieixo dos x positivos e o segmento de reta $\overline{OP}$, medido no sentido anti-horário. Então,

$$x = a\cos t \quad e \quad y = a \operatorname{sen} t,$$

onde $0 \leq t \leq 2\pi$, nos dão uma possível parametrização de C.

Dizemos que uma parametrização de C é **suave** se $x'(t)$ e $y'(t)$ forem contínuas e se o vetor (velocidade)

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath} \neq \vec{0},$$

para todo t em I. As três parametrizações dadas nos exemplos acima são todas suaves. A hipótese de $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ nos permite definir a tangente a C no ponto $P(x(t), y(t))$, ela é a reta que passa por este ponto e é paralela a vetor $\vec{r}'(t)$

Teorema 6.7 *Seja $f(x, y)$ diferenciável e C uma curva de nível de f. Seja $P(x_o, y_o)$ um ponto de C. Então $\nabla f(x_o, y_o)$ será perpendicular a C no ponto P.*

Prova. Seja $x = x(t)$ e $y = y(t)$, t num intervalo I, uma parametrização suave de C. Dizer que $\nabla f(x, y)$ é perpendicular a C no ponto $P(x(t), y(t))$ é equivalente a dizer que

$$\vec{r}'(t) \perp \nabla f(x(t), y(t)) \Leftrightarrow \vec{r}'(t) \cdot \nabla f(x(t), y(t)) = 0.$$

Note que sendo C uma curva de nível de $f(x, y)$, esta função é constante ao longo da mesma, portanto,

$$f(x(t), y(t)) = constante,$$

para todo t em I. Da relação acima e da Regra da Cadeia, veja o Teorema 6.1, concluimos que

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \vec{r}'(t).$$

□

Com isso concluimos a prova do teorema.

Uma consequência do teorema acima é a seguinte: seja $f(x,y)$ uma função diferenciável, então, naqueles pontos (x_o, y_o) onde $\nabla f(x_o, y_o) \neq \vec{0}$, a direção da taxa de máxima de variação de $f(x,y)$ em (x_o, y_o) é ortogonal à curva de nível de $f(x,y)$ que passa por (x_o, y_o). De fato, se $\nabla f(x_o, y_o) \neq \vec{0}$, ele nos dá a direção da taxa de variação máxima de f no ponto (x_o, y_o), a qual pelo Teorema 6.7 é ortogonal a curva de nível de $f(x,y)$ que passa por (x_o, y_o), (veja a Figura 6.1).

Exercício 6.10 Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$ e C a curva $x^2 - y^2 = 1$. Verifique que para todo (x_o, y_o) em C, o vetor $\nabla f(x_o, y_o)$ é perpendicular a C, no ponto (x_o, y_o).

O conceito de derivada direcional se generaliza de uma maneira natural para funções de mais de duas variáveis. Em particular, a derivada direcional de uma função diferenciável $w = f(x,y,z)$ no ponto (x,y,z), na direção do vetor unitário $\vec{n} = (n_1, n_2, n_2)$, é definida como

$$D_{\vec{n}} f(x,y,z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + n_1 t, x + n_2 t, z + n_3 t) - f(x,y,z)}{t}$$

portanto, do Teorema 6.2, temos

$$D_{\vec{n}} f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \vec{n}.$$

Logo, o valor máximo da derivada direcional $D_{\vec{n}} f(x,y,z)$ é $||\nabla f(x,y,z)||$ e ocorre quando o vetor unitário $\vec{n}$ tem a mesma direção e sentido do vetor gradiente $\nabla f(x,y,z)$.

Exercício 6.11 Sabendo-se que a temperatura no ponto (x,y,z) é dada por

$$T(x,y,z) = 100 e^{-x^2 - 3y^2 - 9z^2},$$

onde T é medido em graus centígrados, x, y e z em metros, determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P(2, -1, 1)$ na direção do vetor $(1, -1, 1)$. Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em P? Encontre a taxa de crescimento máxima em P.

AULA 7

Máximos e mínimos de funções de duas ou mais variáveis

OBJETIVOS
No final desta aula, o aluno deverá ser capaz de:
1. Compreender os conceitos de máximos e mínimos locais e globais e de ponto crítico de uma função.
2. Encontrar os pontos críticos de uma função de duas variáveis e classificá-los.
3. Encontrar os valores máximo e mínimo de uma função contínua de duas variáveis, definida num conjunto compacto.

7.1 ALGUMAS DEFINIÇÕES

A seguir veremos as noções de máximos e mínimos absolutos e locais para funções de duas variáveis.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$, onde D é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e (x_o, y_o) um ponto de D. Dizemos que f tem um **máximo absoluto ou global** (ou simplesmente um **máximo**) no ponto (x_o, y_o) se, e somente se, $f(x, y) \leq f(x_o, y_o)$, para todo (x, y) e D. Geometricamente, no gráfico de f não pode ter ponto mais alto que o ponto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$.

De maneira análoga, dizemos que f tem um **mínimo absoluto ou global** (ou simplesmente um **mínimo**) no ponto (x_o, y_o) se, e somente se,

$$f(x, y) \geq f(x_o, y_o),$$

para todo (x, y) em D. Geometricamente, no gráfico de f não pode ter ponto mais baixo que o ponto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$.

Exemplo 7.1 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Então $f(0, 0) = 0$ é o mínimo de f no seu domínio, pois, dados dois números reais x e y quaisquer, temos

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0).$$

Por outro lado, f não possui máximo no seu domínio, por quê?

Exemplo 7.2 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. Então $f(0,0) = 1$ é o máximo de f no seu domínio, pois, dados dois números reais x e y quaisquer, temos

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 \leq 1 = f(0,0).$$

Por outro lado, f não possui mínimo no seu domínio, por quê?
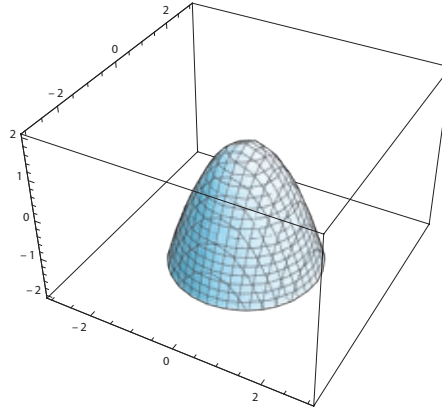
Figura 7.1: O gráfico de $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.

Em geral não é fácil encontrar o máximo nem o mínimo de uma função de duas variáveis como nos exemplos acima e, como salientamos, pode acontecer que a função não tenha máximo ou mínimo, da mesma forma que acontece no caso de funções de apenas uma variável. O teorema abaixo nos dá condições suficientes para a existência de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis.

Teorema 7.1 (***Teorema do Valor Extremo***) Seja D um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^2$. Se f for contínua em D, então f assume os seus valores máximo e mínimo em D. Ou seja, existem pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em D, tais que

$$f(x_1, y_1) \leq f(x,y) \leq f(x_2, y_2),$$

para todo (x,y) em D.

O teorema acima se generaliza para funções de mais de duas variáveis.

Nos exemplos 7.1 e 7.2 ambas as funções são contínuas, porém os seus domínios não são compactos, por não serem limitados, portanto, o teorema acima não se aplica.

Definição 7.1 Dada uma função $f(x,y)$, seja (x_o, y_o) um ponto do seu domínio.

- Se existir algum $r > 0$, tal que

  $$f(x,y) \geq f(x_o, y_o),$$

  para todo $(x,y) \in B(x_o, y_o; r)$, então dizemos que f tem um **mínimo local** em (x_o, y_o).

- Se existir algum $r > 0$, tal que

  $$f(x,y) \leq f(x_o, y_o),$$

  para todo $(x,y) \in B(x_o, y_o; r)$, então dizemos que f tem um **máximo local** em (x_o, y_o).

Valores máximos e mínimos locais de f são chamados de **extremos locais** de f.

É claro que máximos ou mínimos globais também são máximos ou mínimos locais.

No estudo de função de uma variável, vimos que se $g(x)$ fosse uma função definida numa vizinhança de x_o, g diferenciável neste ponto e se neste g tivesse um extremo local, então,

$$g'(x_o) = 0, \tag{7.1}$$

com isso estabelecemos condição necessária para que num dado ponto x_o, no qual g fosse diferenciável, tivéssemos um máximo ou um mínimo local.

Suponha que $f(x,y)$ esteja definida numa vizinhança de (x_o, y_o), no qual as suas derivadas parciais de primeira ordem existam e que neste ponto f tenha um extremo local. Para fixar as ideias, admitiremos que (x_o, y_o) seja um mínimo local. Então, como f tem um mínimo local em (x_o, y_o), para valores de (x,y) suficientemente próximos de (x_o, y_o) devemos ter

$$f(x,y) \geq f(x_o, y_o)$$

ou equivalentemente,

$$f(x,y) - f(x_o, y_o) \geq 0.$$

Em particular, se tomarmos (x,y) da forma $(x_o + h, y_o)$, onde h é suficentemente pequeno, teremos

$$g(x) \equiv f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o) \geq 0. \tag{7.2}$$

Como assumimos que derivada $f_x(x_o, y_o)$ existe, a função $g(x)$ é diferenciável em x_o, pois $g'(x_o) = f_x(x_o, y_o)$. Além disso, de (7.2), $g(x)$ tem um mínimo local em x_o e de (7.1), devemos ter $g'(x_o) = 0$. Portanto,

$$f_x(x_o, y_o) = 0.$$

De maneira análoga, se f tem um mínimo local em (x_o, y_o), então para h suficientemente pequeno, teremos

$$w(y) \equiv f(x_o, y_o + h) - f(x_o, y_o) \geq 0. \tag{7.3}$$

Como assumimos que derivada $f_y(x_o, y_o)$ existe, a função $w(y)$ é diferenciável em y_o, pois $w'(y_o) = f_y(x_o, y_o)$. Além disso, de (7.3), $w(y)$ tem um mínimo local em y_o, e de (7.1), devemos ter $w'(y_o) = 0$. Portanto,

$$f_y(x_o, y_o) = 0.$$

Se tivéssemos assumido que $f(x,y)$ tinha um máximo local em (x_o, y_o), as funções $g(x)$ e $w(y)$ teriam máximos locais em x_o e y_o, respectivamente, e de (7.1), concluiríamos novamente que $f_x(x_o, y_o) = 0 = f_y(x_o, y_o)$, ou seja, $\nabla f(x_o, y_o) = \vec{O}$, onde $\vec{O}$ é o vetor nulo. Com isso provamos o teorema a seguir.

Teorema 7.2 Suponha que $f(x,y)$ esteja definida numa vizinhança de (x_o, y_o), na qual as derivadas parciais de primeira ordem existam e que neste f tenha um extremo local. Então,

$$\nabla f(x_o, y_o) = \vec{O}.$$

Definição 7.2 Um ponto onde alguma das derivadas f_x ou f_y não existir, ou onde $f_x = f_y = 0$ é chamado de um **ponto crítico** de f.

Observação 7.1 Dada a função $f(x,y) = y^2 - x^2$, temos que

$$f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0),$$

contudo, $f(0,0) = 0$ não é nem máximo nem mínimo local de f. De fato, se nos aproximarmos de $(0,0)$ ao longo do eixo x, temos

$$f(x,0) = -x^2 < 0 = f(0,0),$$

se $x \neq 0$. Por outro lado, se nos aproximarmos de $(0,0)$ ao longo do eixo y, teremos

$$f(0,y) = y^2 > 0 = f(0,0),$$

se $y \neq 0$. Portanto, em qualquer vizinhança de $(0,0)$, f assume valores que são maiores e valores que são menores do que $f(0,0)$. Um ponto crítico no qual não há nem máximo nem mínimo local é chamado **ponto de sela**.
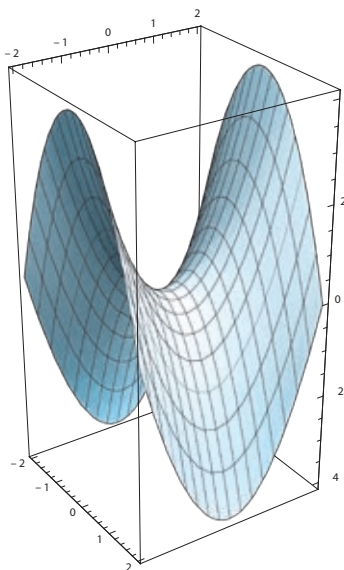
Figura 7.2: A origem é um ponto de sela de $f(x,y) = y^2 - x^2$.

O Teorema 7.2 nos diz que máximos e mínimos de funções diferenciáveis ocorrem nos seus pontos críticos. Portanto, para descobrirmos os máximos e os mínimos de uma função diferenciável $f(x,y)$ numa região aberta D do plano, a primeira coisa a fazer é encontrar os pontos (x,y) nos quais ambas $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ se anulam. Se não houver pontos críticos em D, poderemos afirmar que f não tem nem mínimo nem máximo local em D. Se houver pontos críticos em D, deveremos examinar cada um deles, pois nem sempre um ponto crítico é ponto de mínimo ou de máximo, conforme já vimos. Por isso seria importante se tivéssemos um critério que nos permitisse caracterizar os pontos críticos de uma função diferenciável.

Os conceitos de máximo e mínimo locais e globais, ponto de sela, bem como de pontos críticos, se estendem naturalmente para funções de mais de duas variáveis.

Teorema 7.3 (**Classificação dos pontos críticos**) Suponha que f tenha todas as derivadas parciais até segunda ordem contínuas numa vizinhança de um ponto crítico (x_o, y_o). Seja

$$\begin{aligned}\Delta(x_o, y_o) &\equiv \det\begin{pmatrix} f_{xx}(x_o, y_o) & f_{xy}(x_o, y_o) \\ f_{xy}(x_o, y_o) & f_{yy}(x_o, y_o)\end{pmatrix} \\ &= f_{xx}(x_o, y_o) f_{yy}(x_o, y_o) - (f_{xy}(x_o, y_o))^2.\end{aligned}$$

(i) Se $\Delta(x_o, y_o) < 0$, então o ponto (x_o, y_o) será um **ponto de sela** de $f(x, y)$.

(ii) Se $\Delta(x_o, y_o) > 0$, então $f(x_o, y_o)$ será um máximo local de $f(x, y)$, se $f_{xx}(x_o, y_o) < 0$ e um mínimo local de $f(x, y)$, se $f_{xx}(x_o, y_o) > 0$.

(iii) Se $\Delta(x_o, y_o) = 0$, a natureza de (x_o, y_o) não é determinada por este teste.

O Teste da Derivada Segunda pode ser generalizado para funções de mais de duas variáveis; contudo, ele é bem complicado, envolvendo sinais de determinantes de matrizes de ordens superiores.

Exemplo 7.3 Encontre os extremos locais de

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y$$

(veja a Figura 7.3).
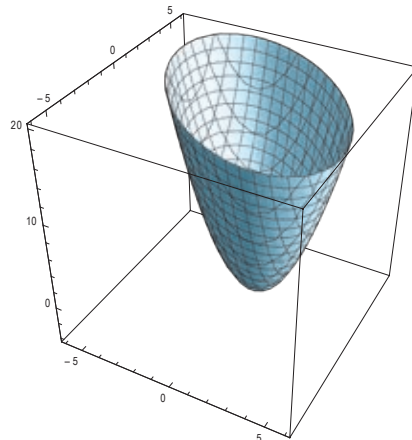
Figura 7.3: Gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y$.

Solução Como $f(x, y)$ é diferenciável em todos os pontos, os seus pontos críticos são os pontos (x, y), nos quais $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$. Como $f_x = 2x + y - 2$ e $f_y = x + 2y - 2$, devemos ter

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x + 2y &= 2, \end{aligned}$$

cuja solução é $x = 2/3$ e $y = 2/3$. As derivadas parciais de segunda ordem são $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 1$ e $f_{yy} = 2$. Logo,

$$\Delta(x, y) = (2)(2) - (1)^2 = 3 > 0,$$

portanto, temos um máximo ou mínimo local em $(2/3, 2/3)$. Como

$$f_{xx}(2/3, 2/3) = 2 > 0,$$

segue-se que temos um mínimo local em $(2/3, 2/3)$.

□

Exemplo 7.4 Encontre e classifique os pontos críticos de

$$f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$$

(veja a Figura 7.4).

Solução Como $f(x,y)$ é diferenciável em todos os pontos, os seus pontos críticos são os pontos (x,y), nos quais $f_x(x,y) = 0$ e $f_y(x,y) = 0$. Portanto, os pontos críticos de f são soluções do seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x,y) = 4y - 4x \\ 0 &= f_y(x,y) = 4x - 4y^3. \end{aligned}$$

Da primeira equação, temos $y = x$, substituindo esta relação na segunda equação acima, temos, $4x(1 - x^2) = 0$, portanto, temos $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$. Logo, os pontos críticos são $(0,0)$, $(1,1)$, e $(-1,-1)$. Como $f_{xx}(x,y) = -4$, $f_{yy}(x,y) = -12y^2$ e $f_{xy} = 4$, temos

$$\Delta(x,y) = 48y^2 - 16.$$

Portanto, $\Delta(0,0) = -16 < 0$, logo, $(0,0)$ é um ponto de sela. Por outro lado, nos pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$, temos $\Delta = 32 > 0$, logo, cada um destes pontos é um extremo local. Como $f_{xx}(x,y) = -4 < 0$, ambos são máximos locais.

□
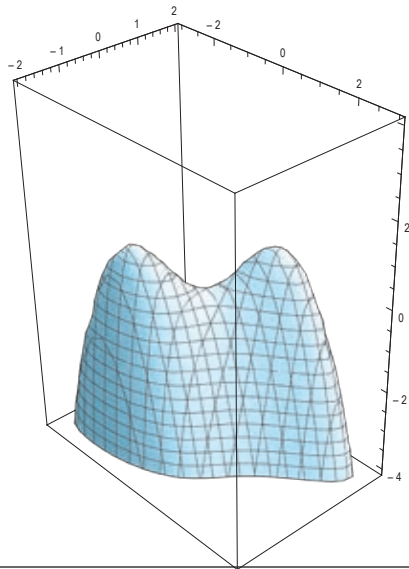
Figura 7.4: Gráfico de $f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$.

Exemplo 7.5 Encontre e classifique os pontos críticos de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$$

(veja a Figura 7.5).

Solução Como $f(x,y)$ é diferenciável em todos os pontos, os seus pontos críticos são os pontos (x,y), nos quais $f_x(x,y) = 0$ e $f_y(x,y) = 0$, ou seja, são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$. Note que

$$f_{xy}(x,y) = 0, f_{xx}(x,y) = 6x \quad \text{e} \quad f_{yy}(x,y) = 6y$$

logo,

$$\Delta(x,y) = 36xy.$$

Então

$$\Delta(1,-1) = \Delta(-1,1) = -36 < 0$$

e concluimos que os pontos $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ são pontos de sela. Note que

$$\Delta(1,1) = \Delta(-1,-1) = 36 > 0,$$

como $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$, temos um ponto de mínimo local em $(1,1)$; por outro lado, $f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$, logo, em $(-1,-1)$, temos um máximo local.

□
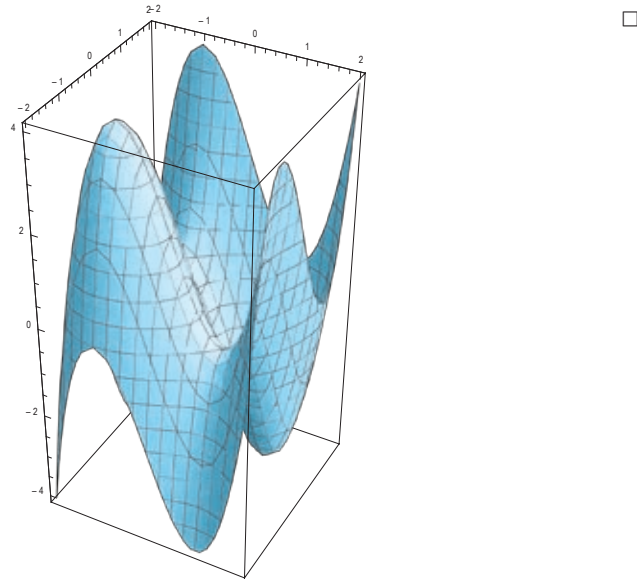
Figura 7.5: Gráfico de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

Exercício 7.1 Determinar os máximos e os mínimos locais da função

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} - \frac{64}{y},$$

na região $D = \{(x,y) \ : \ x < 0 \ e \ y > 0\}$.

Exercício 7.2 Mostre que

$$g(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$$

(veja a Figura 7.6), admite máximo local em $(\pi/3, \pi/3)$ e mínimo local em $(5\pi/3, 5\pi/3)$.

Exemplo 7.6 Mostre que o valor máximo e o valor mínimo de $f(x,y) = x^2 - y^2$ no disco D, dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ ocorrem na fronteira deste. Calcular estes extremos globais.
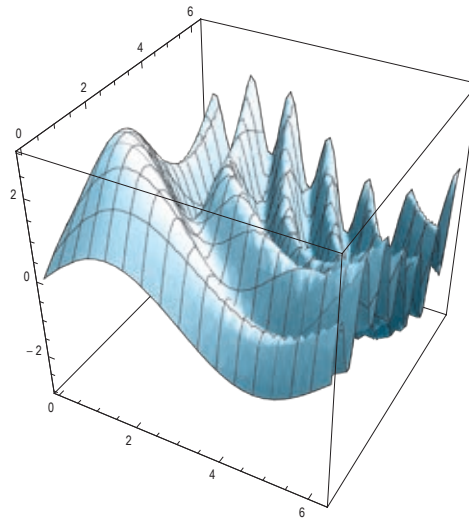
Figura 7.6: Gráfico de $g(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$.

Solução Como $f(x,y)$ é diferenciável para todo (x,y) dentro do disco, segue-se que os seus pontos críticos dentro do disco, caso existam, são as soluções de $\nabla f(x,y) = \vec{0}$. Por outro lado, $\nabla f(x,y) = (x,y)$. Portanto $(0,0)$ é o único ponto crítico de f dentro do disco. Vimos na Observação 7.1 que $(0,0)$ é um ponto de sela. Como $f(x,y)$ é contínua e o seu domínio D é compacto, pelo Teorema 7.1, ela deve assumir os seus valores máximos e mínimos em D. Como eles não podem estar dentro do disco, pois o único ponto crítico lá é $(0,0)$, o qual é um ponto de sela, o máximo e o mínimo devem ocorrer na fronteira de D, ou seja, no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

No círculo temos $y^2 = 1 - x^2$, substituindo esta relação na expressão para $f(x,y)$, temos

$$f(x,y) = 2x^2 - 1 \equiv g(x),$$

onde $-1 \leq x \leq 1$. Com isso os valores máximo e mínimo de f em D são os valores máximo e mínimo de $g(x)$, em $-1 \leq x \leq 1$. Uma conta simples nos leva aos valores -1 e 1 como o mínimo e máximo de g, respectivamente. Portanto, os valores mínimo e máximo de f no disco D são -1 e 1, respectivamente.

□
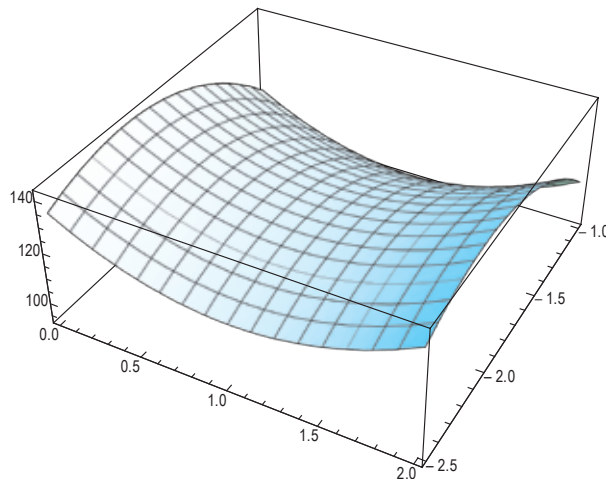
Figura 7.7: Gráfico de $f(x,y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y + 15$.

Exemplo 7.7 Mostre que

$$f(x, y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y + 15,$$

(veja a Figura 7.7), tem um único ponto crítico no $\mathbb{R}^2$, o qual é um ponto de sela.

Exemplo 7.8 Encontre e classifique os pontos críticos de

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

(veja a Figura 7.8).
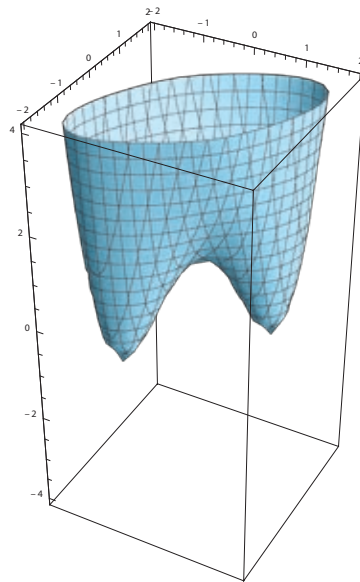
Figura 7.8: Gráfico de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Exercício 7.3 Discuta a natureza dos pontos críticos de cada uma das funções abaixo.

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$

b) $f(x, y) = 3xy - x^2 - y^2$

c) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

d) $f(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

e) $f(x, y) = x^4 + y^4$

f) $f(x, y) = x^4 - y^4$

g) $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

h) $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

i) $f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2}$

j) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

k) $f(x, y) = e^x \cos y$

l) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$

7.2 APLICAÇÕES

A partir do Teorema 7.1, temos um procedimento para encontrar os valores máximos e mínimos de uma função contínua, definida num conjunto limitado e fechado D:

- Calculamos f nos pontos onde $f_x = f_y = 0$ ou alguma das derivadas f_x ou f_y não exista.
- Calculamos os valores de f na fronteira de D.
- O maior e o menor dos valores de f obtidos nos itens acima nos darão os valores máximo e mínimo de f em D.

Exemplo 7.9 Seja
$$f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4,$$
definida no quadrado $D = \{(x,y) \,:\, |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$ (veja a Figura 7.4). Encontre os valores máximos e mínimos de f em D.

Solução Como f é um polinômio, ela é diferenciável em todos os pontos interiores de D, portanto, os pontos críticos de f são os pontos no interior de D, nos quais $\nabla f(x,y) = (0,0)$, ou seja, são soluções do seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x,y) = 4y - 4x \\ 0 &= f_y(x,y) = 4x - 4y^3. \end{aligned}$$

Portanto, os pontos críticos de f são $(0,0)$, $(1,1)$, e $(-1,-1)$, nos quais f vale 0, 1 e 1, respectivamente.

Os valores máximo e mínimo de f têm que ser atingidos em algum destes pontos ou em pontos da fronteira de D.

A seguir estudaremos os valores de f na fronteira de D, a qual é formada de quatro segmentos de reta.

No segmento $x = 2$ e $-2 \leq y \leq 2$, temos $f(x,y) = -8 + 8y - y^4 \equiv g(y)$. Como a função $g(y)$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-2,2]$, ela assume os valores máximo e mínimo no mesmo. Seus pontos críticos são os pontos do interior deste intervalo nos quais $g'(y) = 8 - 4y^3 = 0$, ou seja, $y = 2^{1/3}$ e $g(2^{1/3}) = -8 - 10\,2^{1/3}$. Além disso, nas extremidades do intervalo, temos $g(2) = -8$ e $g(-2) = -40$.

No segmento $x = -2$ e $-2 \leq y \leq 2$, temos $f(x,y) = -8 - 8y - y^4 \equiv h(y)$. Como a função $h(y)$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-2,2]$, ela assume os valores máximo e mínimo no mesmo. Seus pontos críticos são dados por $h'(y) = -8 - 4y^3 = 0$, ou seja, $y = -2^{1/3}$ e $h(-2^{1/3}) = -8 - 6\,2^{1/3}$. Além disso, $h(2) = -40$ e $h(-2) = -8$.

No segmento $y = 2$, $-2 \leq x \leq 2$, temos $f(x,y) = -16 + 8x - 2x^2 \equiv q(x)$. Como a função $q(x)$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-2,2]$, ela assume os valores máximo e mínimo no mesmo. Seus pontos críticos são dados por $q'(x) = 8 - 4x = 0$, ou seja, $x = 2$. Logo, q não tem pontos críticos no interior do seu domínio, portanto, os máximos e mínimos estão nas extremidades do intervalo, ou seja, nos pontos 2 e -2. Note que $q(2) = 0$ e $q(-2) = -32$, que são os seus valores máximo e mínimo, respectivamente.

No segmento $y = -2$, $-2 \leq x \leq 2$, temos $f(x,y) = -16 - 8x - 2x^2 \equiv w(x)$. Como a função $w(x)$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-2,2]$, ela assume os valores máximo e mínimo no mesmo. Seus pontos críticos são dados por $w'(x) = -8 - 4x = 0$, ou seja, $x = -2$. Logo, w não tem pontos críticos no interior do seu domínio, portanto, os máximos e mínimos estão nas extremidades do intervalo, ou seja, nos pontos 2 e -2. Note que $w(2) = -40$ e $w(-2) = -4$, que são os seus valores mínimo e máximo, respectivamente.

Comparando-se os valores de f no interior de D e na fronteira, concluimos que o seu mínimo -40 ocorre nos pontos de fronteira de $(2,-2)$ e $(-2,2)$ e o seu máximo é 1 e é atingido nos pontos interiores $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

□

Exemplo 7.10 Determine os valores máximo e mínimo globais de

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$$

no retângulo $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2\}$.

Solução Como D é limitado e fechado e f é contínua em D, então, f assume os valores máximo e mínimo globais em D. A única solução de $f_x = 0$ e $f_y = 0$ é o ponto $(1,1)$, o qual está no interior de D. Pelo Teste da Derivada Segunda, $(1,1)$ é um ponto de sela de f. Portanto, não há máximos nem mínimos locais de f no interior de D. Logo, os valores máximos e mínimos globais de f ocorrem na fronteira de D.

Estudo de f na fronteira de D:

(i) No segmento de reta $y = 0$, $0 \leq x \leq 3$, temos $f(x,y) = x^2$, logo,

$$0 \leq f(x,y) \leq 9.$$

(ii) No segmento de reta $x = 0$, $0 \leq y \leq 2$, temos $f(x,y) = 2y$, portanto,

$$0 \leq f(x,y) \leq 4.$$

(iii) No segmento de reta $y = 2$, $0 \leq x \leq 3$, temos $f(x,y) = (x-2)^2$, logo,

$$0 \leq f(x,y) \leq 4.$$

(iv) No segmento de reta $x = 3$, $0 \leq y \leq 2$, temos $f(x,y) = 9 - 4y$, portanto,

$$1 \leq f(x,y) \leq 9.$$

Então, o menor e o maior valores de f na fronteira de D são 0 e 9, respectivamente, os quais são os valores mínimo e máximo globais de f.

□

Exercício 7.4 Dada a função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - x$ no quadrado

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\},$$

encontre todos os seus pontos críticos e encontre o seus máximo e mínimo.

Exercício 7.5 Mostre que $H(x,y) = x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2 + 1 \geq 0$ para todo (x,y).

Exercício 7.6 Determine os valores máximo e mínimo globais de f no conjunto D.

a) $f(x,y) = 4 - 3x + 4y$ e D é a região triangular fechada com vértices $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$

b) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ e $D = \{(x,y) \,:\, 0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 5\}$

c) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ e $D = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$

d) $f(x,y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$ e D é o quadrilátero cujos vértices são $(-2,3)$, $(2,3)$, $(2,2)$ e $(-2,-2)$.

Exercício 7.7 Dada uma região triangular equilateral, qual é a posição do ponto P desta região, tal que o produto das distâncias de P aos vértices seja máxima?

Exercício 7.8 Determine o ponto do plano $6x + 4y - 3z = 2$ mais próximo do ponto $(2,-2,3)$. Qual é a distância entre eles?

Exercício 7.9 Determine os pontos da superfície $x^2y^2z = 1$ que estão mais próximos da origem.

Exercício 7.10 Determine três números positivos cuja soma seja 100 e cujo produto seja máximo.

AULA 8

Máximos e mínimos com vínculos: multiplicadores de Lagrange

É muito comum encontrarmos problemas cujas soluções consistem em maximizarmos ou minizarmos o valor de uma função

$$z = f(x,y),$$

sujeita a uma restrição do tipo

$$g(x,y) = 0,$$

onde f e g têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Ou seja, no cálculo de f estamos nos restringindo apenas aos seus valores sobre os pontos (x,y) que estão sobre uma curva C, dada pela condição $g(x,y) = 0$ (veja Figura 8.1).
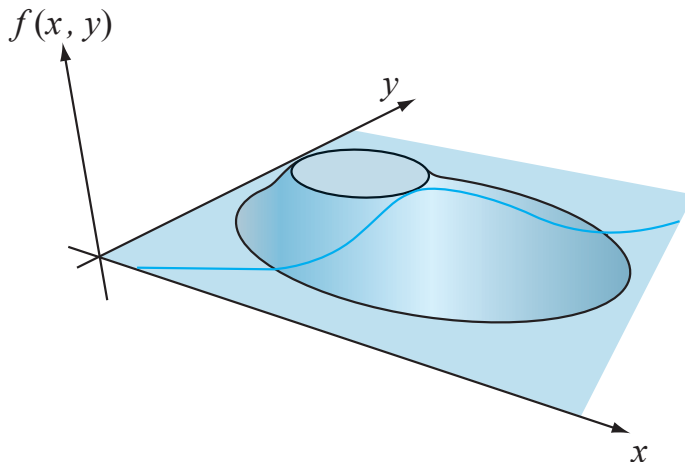
Figura 8.1: O problema de máximo e mínimo de $f(x,y)$ sujeito à restrição $g(x,y)=0$, que é a curva azul na figura.

Nos casos mais simples, podemos resolver a equação $g(x,y) = 0$ em relação a uma variável, por exemplo, $y = \varphi(x)$, o que resultará em $z = f(x, \varphi(x))$. Neste caso teríamos um problema de máximos e mínimos de uma função de uma variável, algo já estudado. Entretanto, nem sempre é possível resolver explicitamente a equação $g(x,y) = 0$ para uma das variáveis, mesmo que teoricamente o Teorema da Função Implícita nos garanta que localmente possamos expressar uma das variáveis como função da outra.

O método dos multiplicadores de Lagrange, que descreveremos a seguir, nos fornecerá uma estratégia para encontrarmos máximos e mínimos de uma função $z = f(x, y)$ sujeita à condição $g(x, y) = 0$.

Sob as hipóteses dadas, C admite uma parametrização suave, $x = x(t)$ e $y = y(t)$, para t pertencendo a algum intervalo I. Suponha que no ponto $(x_o, y_o) = (x(t_o), y(t_o))$ de C a função f tenha um extremo. Então, a função de uma variável $f(x(t), y(t))$ tem um extremo em t_o, logo,

$$\frac{d}{dt} f(x(t_o), y(t_o)) = 0.$$

Por outro lado, da Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t_o), y(t_o)) &= f_x(x(t_o), y(t_o))x'(t_o) + f_y(x(t_o), y(t_o))y'(t_o) \\ &= f_x(x_o, y_o)x'(t_o) + f_y(x_o, y_o)y'(t_o) \\ &= \nabla f(x_o, y_o) \cdot \vec{r}'(t_o). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla f(x_o, y_o) \cdot \vec{r}'(t_o) = 0,$$

o que mostra que $\nabla f(x_o, y_o) \perp \vec{r}'(t_o)$. Por outro lado, de acordo com o Teorema 6.7, $\nabla g(x_o, y_o) \perp \vec{r}'(t_o)$, visto que C é uma curva de nível para g. Como $\nabla f(x_o, y_o)$ e $\nabla g(x_o, y_o)$ são ortogonais ao mesmo vetor, eles devem ser paralelos, ou seja

$$\nabla f(x_o, y_o) = \lambda \nabla g(x_o, y_o).$$

Com isso provamos o seguinte teorema:

Teorema 8.1 (***Teorema de Lagrange***) *Sejam f e g funções de duas variáveis, tais que as suas derivadas parciais de primeira ordem sejam contínuas numa região do plano xy, na qual $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$. Se f tem um extremo $f(x_o, y_o)$ sujeito ao vínculo $g(x, y) = 0$, então existe um número real λ, chamado de* ***multiplicador de Lagrange****, tal que*

$$\nabla f(x_o, y_o) = \lambda \nabla g(x_o, y_o).$$

Se definirmos

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

então,

$$\nabla F(x, y, \lambda) = \vec{0}$$

se, e somente se,

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad e \quad g(x, y) = 0.$$

Portanto, o Teorema 8.1 nos diz que os pontos de máximos e mínimos relativos de $f(x, y)$, sujeito à restrição $g(x, y) = 0$, podem ser encontrados a partir de um problema de máximos e mínimos sem vínculos. Ou seja,

1. Encontramos os pontos $(x_1, y_1, \lambda_1), \ldots, (x_n, y_n, \lambda_n)$, que são soluções de
$$\nabla F(x, y, \lambda) = \vec{0};$$

2. Os pontos onde ocorrem os extremos relativos de f estão entre
$$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n);$$

3. Se f tiver um máximo, sujeito ao vínculo $g(x,y) = 0$, ele é dado por

$$\max\{f(x_1,y_1),\ldots f(x_n,y_n)\}.$$

De maneira análoga, se f tiver um mínimo, sujeito ao vínculo $g(x,y) = 0$, ele é dado por

$$\min\{f(x_1,y_1),\ldots f(x_n,y_n)\}.$$

Exemplo 8.1 Maximize $f(x,y) = x+y$, sujeito à restrição $x^2+y^2 = 1$.

Solução Primeiramente, como f é uma função contínua e estamos restringindo f a pontos do círculo $x^2+y^2 = 1$ que é um conjunto fechado e limitado do plano, necessariamente, os valores máximo e mínimo de f são atingidos em algum ponto do círculo. No método de Lagrange teremos $g(x,y) = x^2+y^2-1$. Logo,

$$F(x,y,\lambda) = x+y-\lambda(x^2+y^2-1),$$

portanto,

$$\nabla F = (1-2\lambda x, 1-2\lambda y, -x^2-y^2+1) = \vec{0},$$

se, e somente se, tivermos

$$\begin{aligned} 2\lambda x &= 1 \\ 2\lambda y &= 1 \\ x^2+y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Note que da primeira ou da segunda equações devemos ter $\lambda \neq 0$; caso contrário, seríamos levado à equação $0 = 1$. Como $\lambda \neq 0$, da primeira e da segunda equações, concluimos que $x = \frac{1}{2\lambda} = y$, portanto, $x = y$. Fazendo-se $x = y$ na terceira equação, temos $2x^2 = 1$, portanto, $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, temos os seguintes valores para (x,y):

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \; e \; \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Calculando f nestes pontos, temos

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \; e \; f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}.$$

Portanto, o maior de f é $\sqrt{2}$ e o menor valor de f é $-\sqrt{2}$.

□

A seguir discutiremos um pouco sobre a geometria por trás do método de Lagrange.

Suponha que tenhamos desenhado no plano xy as curvas de níveis de $f(x,y)$ e a curva C que representa $g(x,y) = 0$. Se num dado ponto (x_o,y_o), $f(x,y)$ com o vínculo $g(x,y) = 0$ tiver um máximo local ou de mínimo local, então C deve tangenciar a curva de nível $f(x,y) = f(x_o,y_o)$. De fato, sabemos que neste ponto $\nabla g(x_o,y_o)$ e $\nabla f(x_o,y_o)$ devem ser perpendiculares, mas $\nabla g(x_o,y_o)$ deve ser perpendicular a C, pois esta é uma das suas curvas de níveis. Portanto, C deve ser tangente à curva de nível $f(x,y) = f(x_o,y_o)$. Com isto temos **um método geométrico** para encontrarmos o máximo e o mínimo local de $f(x,y)$ com o vínculo $g(x,y) = 0$ baseado no método de Lagrange: eles serão os pontos (x_o,y_o) nos os quais a curva $g(x,y) = 0$ tangência $f(x,y) = f(x_o,y_o)$.

Exercício 8.1 Determinar o máximo e o mínimo da função $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, onde as variáveis x e y estão sujeitas à restrição $y - x = \pi/4$.

Exercício 8.2 Determinar o máximo e o mínimo da função $z = 2x + y$ sobre o círculo

$$x^2 + y^2 = 5.$$

Interprete geometricamente o problema.

Exercício 8.3 Encontre o máximo de $f(x,y) = x^2 y$, sujeito à restrição $x^2 + y^2 = 3$.

Exercício 8.4 Determinar o ponto da elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ situado no primeiro quadrante, no qual a tangente à curva forma com os eixos coordenados o triângulo de menor área possível. Calcular a área deste triângulo.

Exercício 8.5 Ache os valores máximo e mínimo de $f(x,y) = xy$, sabendo-se que (x,y) está restrito à elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

O Teorema de Lagrange pode ser estendido para o caso de funções de mais de duas variáveis e quando temos mais de um vínculo. A ideia é que para cada vínculo introduzamos um multiplicador de Lagrange diferente. Dois exemplos de tais generalizações são dados a seguir.

1. Se a função a ser otimizada for a função $f(x,y,z)$ e tivermos apenas um vínculo

$$g(x,y,z) = 0,$$

o que corresponde a nos restringirmos aos pontos (x,y,z) de uma superfície no espaço, então, devemos considerar a função

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

e encontrarmos as soluções $(x_i, y_i, z_i, \lambda_i)$, de

$$\nabla F(x,y,z,\lambda) = \vec{0}.$$

Os extremos de f com o vínculo $g(x,y,z) = 0$ estarão entre os pontos (x_i, y_i, z_i). Mais precisamente, se f restrita a $g(x,y,z) = 0$ tiver um máximo ele será dado por $\max_i\{f(x_i, y_i, z_i)\}$, e de maneira análoga, se f restrita a $g(x,y,z) = 0$ tiver um mínimo, ele será dado por $\min_i\{f(x_i, y_i, z_i)\}$.

2. Se a função a ser otimizada for a função $f(x,y,z)$ e tivermos dois vínculos

$$g(x,y,z) = 0 \ e \ h(x,y,z) = 0,$$

o que corresponde restringirmos aos pontos (x,y,z) de uma curva no espaço, então, devemos considerar a função

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) - \mu h(x,y,z)$$

e encontrarmos as soluções $(x_i, y_i, z_i, \lambda_i, \mu_i)$, de

$$\nabla F(x,y,z,\lambda) = \vec{0}.$$

Os extremos de f com os vínculos $g(x,y,z) = 0$ $h(x,y,z) = 0$ estarão entre os pontos (x_i, y_i, z_i). Mais precisamente, se f sujeita às restrições $g(x,y,z) = 0$ e $h(x,y,z) = 0$ tiver um máximo, ele será dado por $\max_i\{f(x_i, y_i, z_i)\}$, e de maneira análoga, se f sujeita às restrições $g(x,y,z) = 0$ e $h(x,y,z) = 0$ tiver um mínimo ele será dado por $\min_i\{f(x_i, y_i, z_i)\}$.

Exemplo 8.2 Encontre o volume da maior caixa retangular de lados paralelos aos planos coordenados que possa ser inscrita no elipsoide

$$16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144.$$

Solução Por simetria o volume da caixa será 8 vezes o volume da sua restrição ao primeiro octante, ou seja,

$$V(x,y,z) = 8xyz,$$

onde $x, y, z \geq 0$. Neste caso, (x,y,z) são pontos do elipsoide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0$, que é o vínculo. Ou seja, $g(x,y,z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144$. Portanto,

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144).$$

Logo, $\nabla F(x,y,z,\lambda) = \vec{0}$ é equivalente a

$$\begin{aligned} 8yz &= 32\lambda x \\ 8xz &= 8\lambda y \\ 8xy &= 18\lambda z \\ 144 &= 16x^2 + 4y^2 + 9z^2. \end{aligned}$$

Como f é contínua e o elipsoide restrito ao primeiro quadrante é uma região limitada e fechada, então, sobre o mesmo $f(x,y,z)$ assume o seus valores máximo e mínimo. É claro que existem pontos sobre o elipsoide para os quais todas as coordenadas são diferentes de zero, portanto, o valor máximo de V não pode ser zero. Se alguma das coordenadas de (x,y,z) for zero, então, o volume correspondente seria zero, portanto, $V(x,y,z)$ não poderia ser máximo. Assim, no que se segue vamos supor que x, y e z não sejam nulos. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{yz}{4x} = \frac{xz}{y} = \frac{4xy}{9z} \\ 144 &= 16x^2 + 4y^2 + 9z^2. \end{aligned}$$

Logo, temos as seguintes relações $y^2 = 4x^2$ e $4y^2 = 9z^2$ e $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$. Eliminando-se y e z, temos $48x^2 = 144$, ou seja, $x = \sqrt{3}$, portanto, $y = 2\sqrt{3}$ e $z = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Logo, o volume máximo é $8xyz = 64\sqrt{3}$.

□

Exemplo 8.3 Encontre o ponto do plano $2x + 3y + 4z = 12$ no qual

$$f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$$

assume o seu valor mínimo.

Solução Note que os valores de x, y e z podem ficar arbitriamente grandes sobre o plano, e o mesmo acontecerá com $f(x,y,z)$, ou seja, f não tem valor máximo sobre o plano.

Temos que encontrar as soluções de $\nabla F(x,y,z,\lambda) = \vec{0}$, onde

$$F(x,y,z,\lambda) = 4x^2 + y^2 + 5z^2 - \lambda(2x + 3y + 4z - 12).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} 8x &= 2\lambda \\ 2y &= 3\lambda \\ 10z &= 4\lambda \\ 12 &= 2x + 3y + 4z, \end{aligned}$$

o que é equivalente a $\lambda = 4x = \frac{2}{3}y = \frac{5}{2}z$ e $2x + 3y + 4z = 12$. Ou ainda, $y = 6x$, $z = 10x$ e $2x + 3y + 4z = 12$. Portanto, eliminando-se y e z, temos $x = \frac{5}{11}$, o que implica que $y = \frac{30}{11}$ e $y = \frac{8}{11}$. Como f não tem máximo sobre o plano, então o seu ponto crítico deve ser de mínimo.

□

Exercício 8.6 Seja C a curva no primeiro octante resultante da interseção do parabolóide $2z = 16 - x^2 - y^2$ e do plano $x + y = 4$. Ache os pontos de C que estão mais próximos e mais distantes da origem.
Sugestão: A função a ser otimizada é $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ e os vínculos são $g(x,y,z) = 2z - 16 + x^2 + y^2)$ e $h(x,y,z) = x + y - 4 = 0$.

Exercício 8.7 Nos exercícios abaixo, utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para achar os extremos de f sujeito aos vínculos dados.

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2 - 1 = 0$

b) $f(x,y) = y^2 - 4xy + 4x^2$ e $x^2 + y^2 - 1 = 0$

c) $f(x,y) = x^2y$ e $x^2 + 2y^2 = 6$

d) $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = x^4 + y^4 = 1$

e) $f(x,y) = y - \cos x + 2x$ e $x^2 + 2y^2 = 1$

f) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $x - y + z = 1$

g) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

h) $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$, $x + y + z = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

i) $f(x,y,z) = xy + yz$, $x^2 + y^2 = 2$ e $yz = 2$

j) $f(x,y,z) = x + 2y$, $x + y + z = 1$ e $y^2 + z^2 = 4$

k) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$, $x - y + z = 1$ e $x^2 + y^2 = 1$.

Exercício 8.8 Determine os valores extremos de $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ na região descrita pela desigualdade $x^2 + y^2 \leq 16$.

Exercício 8.9 Determine os volumes máximo e mínimo de uma caixa retangular cuja superfície tem 1500 cm^2 e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm.

Referências

[1] AVRITZER, Dan. *Geometria analítica e álgebra linear*: uma visão geométrica. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2009. tomo II.

[2] STEWART, James. *Cálculo*. 5. ed. São Paulo: Pioneira. Thompson Learning, 2006. v. II.

Sobre o autor

Paulo Cupertino de Lima é doutor em Matemática pelo Courant Institute of Mathematical Sciences - New York University, professor Associado da Universidade Federal de Minas Gerais, com experiência em Física Matemática, principalmente: equações diferenciais parciais, equações diferenciais ordinárias; teoria, algoritmos e aplicações de wavelets e problemas de Mecânica Estatística do equilíbrio.